Exercice 4 — Candidats n'ayant pas suivi la spécialité — 5 points

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur 0,5u+0,5(k–1)–1,5 Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour p=2 en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n par : $u_{n+1}=0{,}5\,u_n+0{,}5\,n-1{,}5$.

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.

2. A l'aide de l'algorithme modifié après avoir saisi p=4, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	-0.5	-0.75	-0.375

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1}>u_n$. Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n=0{,}1\,u_n-0{,}1\,n+0{,}5$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=10\times 0{,}5^n+n-5$

6. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Correction :

Partie A

Initialisation : $p=2$ et $u=5$
Première étape : $k=1$ $(k\leqslant p)$
$u=0{,}5\times 5+0{,}5\times 0-1{,}5=2{,}5-1{,}5=1$

Deuxième étape : $k=2$ $(k\leqslant p)$
$u=0{,}5\times 1+0{,}5\times 1-1{,}5=0{,}5+0{,}5-1{,}5=-0{,}5$
Fin de Pour
Sortie : $\boxed{\mathbf{-0{,}5}}$

Partie B

1. Pour obtenir toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p, il suffit de permuter les deux dernières instructions.

Pour k variant de 1 à p
Affecter à u la valeur $0{,}5u+0{,}5(k-1)-1{,}5$
Afficher u
Fin de Pour

2. (u_n) **n'est pas une suite décroissante** car $u_4=-0{,}375 > u_n=-0{,}75$

3. On veut démontrer en utilisant **un raisonnement par récurrence** que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 : on a $u_{n+1}>u_n$.

Initialisation
$u_3=-0{,}75$ et $u_4=-0{,}375$ donc $u_4>u_3$
La propriété est vérifiée pour n=3

Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, on suppose que $u_{n+1}>u_n$ et on doit démontrer que $u_{n+2}>u_{n+1}$.
Or on a pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :
$u_{n+1}=0{,}5u_n+0{,}5n-1{,}5$
$u_{n+2}=0{,}5u_{n+1}+0{,}5(n+1)-1{,}5$.
On retranche membre à membre la première égalité de la seconde, on obtient :
$u_{n+2}-u_{n+1}=0{,}5(u_{n+1}-u_n)+0{,}5$
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a $u_{n+1}-u_n>0$, on obtient $u_{n+2}-u_{n+1}>0$
soit $u_{n+2}>u_{n+1}$.

Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que, tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a : $\boxed{u_{n+1}>u_n}$.

Conséquence
La suite (u_n) est **croissante à partir du rang 3**.

4. Pour tout entier naturel n :

$v_n = 0{,}1\,u_n - 0{,}1\,n + 0{,}5$

donc $0{,}1\,u_n = v_n + 0{,}1\,n - 0{,}5$ et $u_n = 10\,v_n + n - 5$.

Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1} = 0{,}1\,u_{n+1} - 0{,}1(n+1) + 0{,}5$

or $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 0{,}5\,n - 1{,}5$

$v_{n+1} = 0{,}1(0{,}5\,u_n + 0{,}5\,n - 1{,}5) - 0{,}1(n+1) + 0{,}5$

or $u_n = 10\,v_n + n - 5$

$v_{n+1} = 0{,}1[0{,}5(10\,v_n + n - 5) + 0{,}5\,n - 1{,}5] - 0{,}1(n+1) + 0{,}5$

$v_{n+1} = 0{,}1(5\,v_n + 0{,}5\,n - 2{,}5 + 0{,}5\,n - 1{,}5) - 0{,}1\,n + 0{,}4$

$v_{n+1} = 0{,}1(5\,v_n + n - 4) - 0{,}1\,n + 0{,}4$

$v_{n+1} = 0{,}5\,v_n + 0{,}1\,n - 0{,}4 - 0{,}1\,n + 0{,}4$

$v_{n+1} = 0{,}5\,v_n$

Donc (v_n) est la suite géométrique de raison $q=0{,}5$ et de premier terme :

$v_0 = 0{,}5\,u_0 - 0{,}5\times 0 - 1{,}5 = 0{,}5\times 5 - 1{,}5 = 2{,}5 - 1{,}5 = 1$

Pour tout entier naturel n :

$\boxed{v_n = v_0\,q^n = 0{,}5^n}$

5. Pour tout entier naturel n

$\boxed{u_n = 10\,v_n + n - 5 = 10\times 0{,}5^n + n - 5}$

6. $0 \leqslant 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$

d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 5 = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boxed{+\infty}$