

Exercice 1
5 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. Les probabilités sont arrondies au millième.

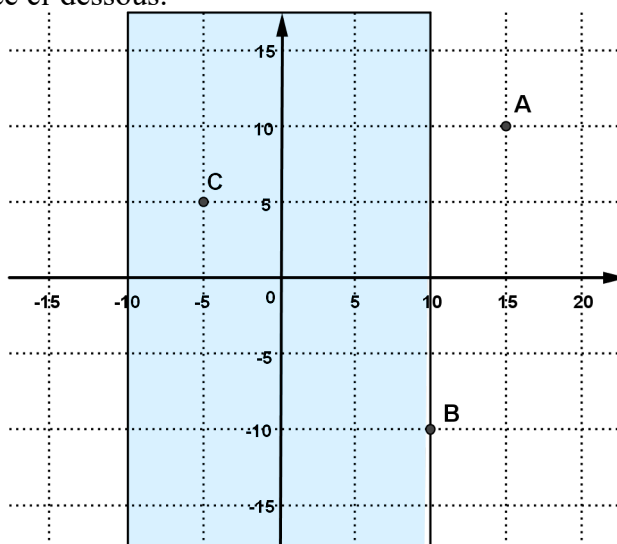
Partie A

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. A chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.
2. Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible douze fois. ?

Partie B

Entre deux phases du concours, pour se perfectionner, le concurrent travaille sa précision latérale sur une autre cible d'entraînement, représentée ci-dessous.



Pour cela, il tire des flèches pour essayer d'atteindre une bande verticale, de largeur 20 cm (colorée en bleu sur la figure), le plus près possible de la ligne verticale centrale.

On munit le plan contenant la bande verticale d'un repère : la ligne centrale visée est l'axe des ordonnées.

On note X la variable aléatoire qui, à toute flèche tirée atteignant ce plan, associe l'abscisse de son point d'impact.

Ainsi par exemple :

- si la flèche atteint le point A, le tireur a raté la bande, et X prend la valeur 15 ;
- si elle atteint le point B, l'impact est sur la limite de la bande, et X prend la valeur 10 ;
- si elle atteint le point C, l'impact est dans la bande et X prend la valeur -5.

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1. Lorsque la flèche atteint le plan, déterminer la probabilité que son point d'impact soit situé hors de la bande colorée.
2. Comment modifier les bords de la bande colorée pour faire en sorte que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à 0,6 ?

Partie C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimée en h^{-1}).

1. Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2000 heures ?

2. Restitution organisée des connaissances

Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif. On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre λ est définie par : $E(T) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$.

a. On considère la fonction F , définie pour tout réel t par : $F(t) = (-t - \frac{1}{\lambda})e^{-\lambda t}$.

Démontrer que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie pour tout réel t par : $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

b. En déduire que l'espérance mathématique de la variable T est égale à $\frac{1}{\lambda}$. Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents.

Correction :**Partie A**

On considère **l'épreuve Bernoulli** suivante :

Le concurrent tire une flèche :

succès S : « la flèche atteint la cible ». La probabilité de succès $P(S)=0,8$

échec $\bar{S}$: « la flèche n'atteint pas la cible ». La probabilité de l'échec $P(\bar{S})=1-0,8=0,2$

Soit n un entier naturel non nul. Le concurrent effectue n tirs, on considère que les tirs sont indépendants.

On obtient un schéma de Bernoulli de paramètres n et $0,8$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès en n épreuves, la loi de probabilité de X est **la loi binomiale de paramètres n et $0,8$** .

1. On a $n=4$ et on nous demande de calculer $P(3 \leq X)$.

Or, $P(3 \leq X) = P(X=3) + P(X=4)$

$$P(X=4) = 0,8^4$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3} \times 0,8^3 \times 0,2 = 4 \times 0,8^3 \times 0,2 = 0,8^4$$

$$P(3 \leq X) = 2 \times 0,8^4 = \mathbf{0,819}$$

2. On doit déterminer l'entier naturel n pour que l'espérance mathématique de X soit égale à 12.

Or, $E(X) = n \times 0,8$

$$0,8n = 12 \Leftrightarrow n = \frac{12}{0,8} = \frac{120}{8} = \mathbf{15}$$

Partie B

1. X suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

La probabilité que la flèche atteigne la bande colorée est : $P(-10 \leq X \leq 10)$.

Or, $P(-10 \leq X \leq 10) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \mathbf{0,683}$

(résultat à connaître, mais on retrouve ce résultat avec la calculatrice).

Donc, la probabilité que la flèche n'atteigne pas la bande colorée est :

$$1 - P(-10 \leq X \leq 10) = 1 - 0,683 = \mathbf{0,317}$$

2. On veut déterminer le nombre réel strictement positif a tel que $P(-a \leq X \leq a) = 0,6$.

Remarque :

$$P(-a \leq X \leq a) = 1 - 2P(a \leq X)$$

$$P(-a \leq X \leq a) = 0,6 \Leftrightarrow P(a \leq X) = 0,2.$$

En utilisant la calculatrice on obtient $P(-8,42 \leq X \leq 8,42) = 0,600$ à 10^{-3} près ;

Si on arrondit au dixième (c'est à dire au millimètre) on choisit **$a=8,4$** .

On obtient une bande colorée de largeur $2 \times 8,4 = \mathbf{16,8cm}$ (entre -8,4 et 8,4).

Partie C

1. T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ donc $P(T \leq 2000) = \int_0^{2000} \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda \times 2000} + 1$

$$\text{et, } P(2000 \leq T) = 1 - \int_0^{2000} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda \times 2000}$$

$$\lambda = 10^{-4} \text{ donc } \lambda \times 2000 = 0,2$$

$$P(2000 \leq T) = e^{-0,2} = \underline{\underline{0,819}}$$

2. Restitution organisée des connaissances

λ est un nombre réel strictement positif

a. F est définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(t) = \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$F'(t) = -e^{-\lambda t} - \lambda \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} = -e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} = f(t)$$

F est **une primitive de f** sur $\mathbb{R}$

$$\text{b. } h(x) = \int_0^x f(t) dt = F(x) - F(0) = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} e^0 = \frac{1}{\lambda} - x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{donc, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\lambda x} = 0$$

Conséquence

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

L'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents est :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4 = \underline{\underline{10\,000 \text{ heures}}}$$