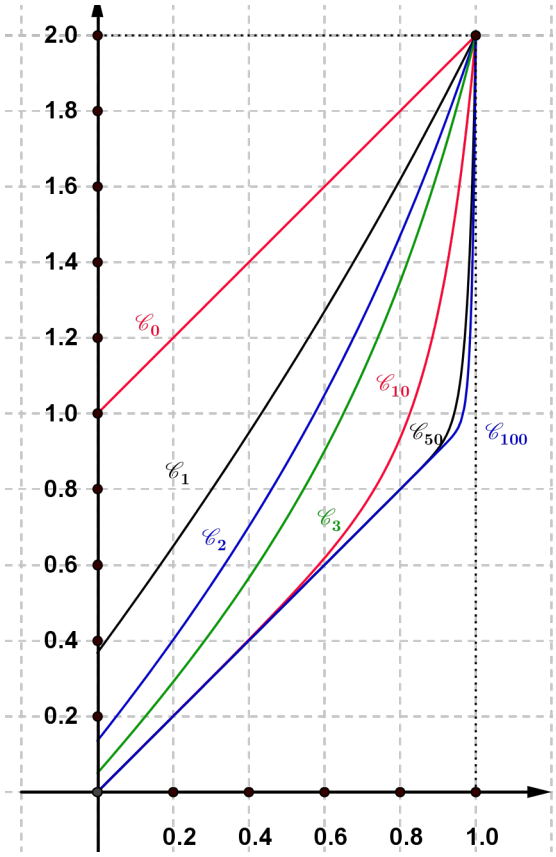
Exercice 3 — 6 points

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par : $f_n(x)=x+e^{n(x-1)}$.
On note $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal. Quelques-unes des courbes $\mathscr{C}_n$ sont représentées ci-dessous.



Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0;1]$.

2. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.

3. A l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathscr{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ? Démontrer cette conjecture.

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0;1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x=1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $0\leqslant x<1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Partie C : aire sous les courbes $\mathscr{C}_n$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{A}_n$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.
A partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite $(\mathscr{A}_n)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Correction :

Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. Pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;1]$,
$f_n(x)=x+e^{n(x-1)}$
pour n=0 $f_0(x)=x+e^0=x+1$
f_0 est **croissante et positive** sur $[0;1]$

pour n≥1 f_n est **dérivable** sur $[0:1]$, $f'(x)=1+n\,e^{n(x-1)}$
Pour tout x de l'intervalle $[0;1]$, $n\,e^{n(x-1)}>0$
Donc, f_n est **croissante** sur $[0;1]$
$x\geq 0$ et $e^{n(x-1)}>0$ donc $f_n(x)>0$ sur $[0;1]$
donc, f_n est **positive** sur $[0;1]$.

2. En considérant la figure donnée dans l'énoncé, on peut conjecturer que les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point $A(1;2)$. Il suffit de vérifier cette conjecture.
Pour tout entier naturel n : $f_n(1)=1+e^{n(1-1)}=1+e^0=2$.
Pour tout entier naturel n, la courbe $\mathscr{C}_n$ **passe par le point** $A(1;2)$

3. Le coefficient directeur de la tangente en A augmente lorsque n augmente, pour n grand (n=100 par exemple), on peut conjecturer que la tangente est « presque verticale ».
Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ en A est : $f'_n(1)$.
Or, $f'_n(1)=1+n\,e^0=1+n$
$\lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(1)=+\infty$
La **tangente** en A à la courbe **est voisine d'une tangente verticale lorsque n est très grand**.

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

x fixé pour tout entier naturel n : $u_n=f_n(x)$.

1. On suppose $x=1$ alors pour tout entier naturel n : $u_n=f_n(1)=2$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$.

2. x fixé et $0\leq x<1$
pour tout entier naturel n
$u_n=f_n(x)=x+e^{n(x-1)}$
or $x-1<0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x-1)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{n(x-1)}=0$
conséquence
$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=x}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

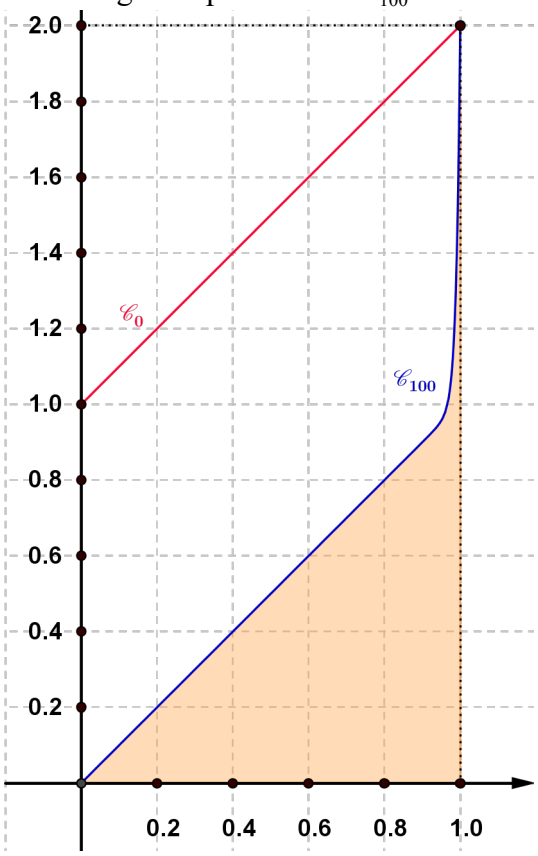
Partie C : aire sous les courbes $\mathscr{C}_n$

En considérant les différentes courbes sur la figure, on remarque que : $\mathscr{A}_0 = \frac{3}{2}$ U.A. (aire d'un trapèze).

La suite $(\mathscr{A}_n)$ est **décroissante**.

La limite de la suite $(\mathscr{A}_n)$ est l'aire du triangle délimité par l'axe des abscisses, la droite d'équation $y=x$ et la droite d'équation $x=1$ soit $\boxed{\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}}$.

Pour justifier cette conjecture on joint une figure représentant $\mathscr{A}_{100}$



$$\mathscr{A}_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

Pour calculer $\mathscr{A}_n$, il suffit de déterminer une primitive de f_n sur $[0;1]$

$$f_n(x)=x+e^{n(x-1)}$$

$$F_n(x)=\frac{x^2}{2}\frac{e^{n(x-1)}}{n}$$

F_n est **une primitive** de f_n sur $[0;1]$

$$\mathscr{A}_n = F(1)-F(0)=\frac{1}{2}+\frac{e^0}{n}-\frac{0}{2}-\frac{e^{-n}}{n}$$

$$\mathscr{A}_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{e^{-n}}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-n}}{n}=0$$

Donc, $\boxed{\frac{1}{2}}$ est **la limite** de $\mathscr{A}_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés