Exercice 4 **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité** 5 points

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On donne le nombre complexe $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : Propriétés du nombre j

1.a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2+z+1=0$
b. Vérifier que le nombre complexe j est solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

3. Démontrer les égalités suivantes :
a. $j^3=1$
b. $j^2=-1-j$

4. On note P, Q et R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a+jb+j^2c=0$. On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A.3.b, démontrer l'égalité : $a-c=j(c-b)$.

2. En déduire que AC = BC.

3. Démontrer l'égalité : $a-b=j^2(c-b)$.

4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Correction :

$j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Partie A : propriétés du nombre j

1.a. $z^2+z+1=0$

$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3=(i\sqrt{3})^2$

L'équation admet 2 solutions complexes conjuguées :

$\boxed{z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$

b. $j=z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

donc j est solution de l'équation.

2. $|j|^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

arg j= $\theta\quad(2\pi)$

$\cos(\theta)=-\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc, $\theta=\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

$\boxed{j=e^{i\frac{2\pi}{2}}}$

3.a.

$|j^2|=|j|^2=1^2=1$

$\arg j^2=\arg j+\arg j\ (2\pi)$

$\arg j^2=\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

$\arg j^2=\frac{4\pi}{3}\ (2\pi)$

$j^3=j^2\times j$

$|j^3|=|j^2|\times|j|=1\times1=1$

$\arg j^3=\arg j^2+\arg j\ (2\pi)$

$\arg j^3=\frac{4\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

$\arg j^3=0\ (2\pi)$

donc, $\boxed{j^3=e^{i\times0}=1}$

b. j est une solution de l'équation $z^2+z+1=0$ donc $\boxed{j^2+j+1=0}$

Conséquence

$\boxed{j^2=-1-j}$

4. $P(1)$, $Q(j)$ et $R(j^2)$ on a $j^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{PQ}(j-1)$ $\quad\overrightarrow{PR}(j^2-1)$ $\quad\overrightarrow{QR}(j^2-j)$

$\overrightarrow{PQ}\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad\overrightarrow{PR}\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad\overrightarrow{QR}(-i\sqrt{3})$

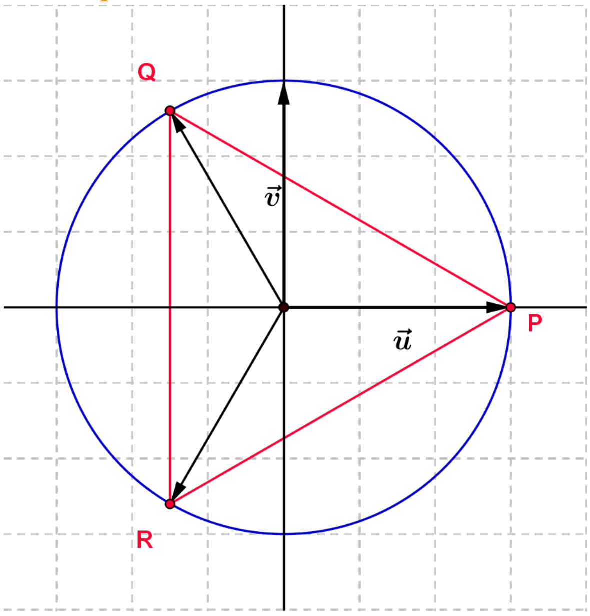
$$PQ^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=\frac{12}{4}=3$$

$$PR^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=\frac{12}{4}=3$$

$$QR^2=(-\sqrt{3})^2=3$$

Conclusion

$\boxed{PQ=PR=QR}$ et **le triangle PQR est équilatéral**.



Partie B

a, b et c sont des nombres complexes vérifiant : $a+bj+cj^2=0$.

$A(a)$ $\quad B(b)$ $\quad C(c)$

1. $j^2=-1-j$

donc $a+jb+(-1-j)c=0$

$a-c+jb-jc=0$

$\boxed{a-c=j(c-b)}$

2. $\overrightarrow{CA}(a-c)$ $\quad\overrightarrow{BC}(c-b)$

$|a-c|=|j|\times|c-b|=|c-b|$ car $|j|=1$

Donc, **CA=BC**

3. On a $1+j+j^2=0$ donc $j=-j^2-1$

donc, $a+(-1-j^2)b+j^2=0$

$a-b-j^2b+j^2c=0$

$\boxed{a-b=j^2(b-c)}$

4. $\overrightarrow{BA}(a-b)$ $\overrightarrow{CB}(b-c)$

$|a-b|=|j^2|\times|b-c|=|b-c|$ car $|j^2|=1$ | a – b | = | j^2 |x| b – c | = | b – c | car | j^2 | = 1

et $BA=CB$

<u>Conclusion</u>

$CA=BC=BA$ **<u>et le triangle ABC est équilatéral.</u>**