Exercice 4 — Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : N=1+2+. . .+n. Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car 10=1+2+3+4.
Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.
On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.

2.a. Montrer que le nombre 1+2+. . .+n est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2+n-2p^2=0$.
b. En déduire que le nombre 1+2+. . .+n est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2-8p^2=1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne : $x^2-8y^2=1$, où x et y désignent des entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de (E).

2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

2. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et y en fonction de x' et y' .

3. Démontrer que $(x\,;y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'\,;y')$ est solution de (E).

4. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0=3$ et $y_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$. On admet que, ainsi défini les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;y_n)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

A l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2015 qui est le carré d'un entier.

Correction :

N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel non nul n tel que :N=1+2+. . .+n= $\frac{n(n+1)}{2}$.

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. 36 est un entier triangulaire si et seulement s'il existe un entier naturel n tel que : $\frac{n(n+1)}{2}=36$.

Donc $n^2+n=72 \Leftrightarrow n^2+n-72=0$
$\Delta=1+4\times 72=289=17^2$
$n'=\frac{-1-17}{2}=-9$ et $n''=\frac{-1+17}{2}=8$
On obtient n=8 et 1+2+3+4+5+6+7+8=36 et 36=6².

2.a. Le nombre 1+2+. . .+n est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier p tel que :
$\frac{n(n+1)}{2}=p^2 \Leftrightarrow n(n+1)=2p^2 \Leftrightarrow n^2+n-2p^2=0$.
b. $n^2+n-2p^2=0 \Leftrightarrow 4n^2+4n-8p^2=0 \Leftrightarrow 4n^2+4n+1-8p^2=1 \Leftrightarrow (2n+1)^2-8p^2=1$ **.**
Donc, le nombre 1+2+. . .+n est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que :
$\boxed{(2n+1)^2-8p^2=1}$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère l'équation diophantienne (E) : $x^2-8y^2=1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Les couples $(1;0)$ et $(3;1)$ sont des solutions de l'équation (E), ce sont des couples d'entiers naturels inférieurs à 10.

2. Tout diviseur, entier naturel, commun de x et y est un diviseur commun de x^2 et y^2 donc un diviseur de 1 .
Conséquence
1 est le seul diviseur entier naturel commun à x et y donc x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

$A=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

1. x et y sont des entiers relatifs et x' et y' sont les entiers relatifs tels que : $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

On obtient $\boxed{\begin{cases}x'=3x+8y\\ y'=x+3y\end{cases}}$

2. En utilisant la calculatrice on obtient la matrice inverse de A
$A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -8\\ -1 & 3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

donc, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On obtient $\boxed{\begin{cases} x = 3x' - 8y' \\ y = -x' + 3y' \end{cases}}$.

3. On a : $x'^2 - 8y'^2 = (3x+8y)^2 - 8(x+3y)^2 = 9x^2 + 64y^2 + 48xy - 8(x^2 + 9y^2 + 6xy)$

$x'^2 - 8y'^2 = 9x^2 + 64y^2 + 48xy - 8x^2 - 72y^2 - 48xy = x^2 - 8y^2$

donc $x^2 - 8y^2 = 1$ si et seulement si $x'^2 - 8y'^2 = 1$

Conséquence

$(x;y)$ est **solution de (E)** si et seulement si $(x';y')$ est **solution de (E)**.

4. $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

On veut démontrer en utilisant **un raisonnement par récurrence**, que pour tout entier naturel n : $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$.

Initialisation

$x_0^2 - 8y_0^2 = 3^2 - 8 \times 1^2 = 9 - 8 = 1$

La propriété est vérifiée pour n=0

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$ et on doit démontrer que : $x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = 1$

Or, en utilisant le résultat de la question précédente, sachant que $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$,si $(x_n;y_n)$ est solution de (E) alors $(x_{n+1};y_{n+1})$ est solution de (E).

(on admet que les nombres considérés sont des entiers naturels)

Conclusion

Le **principe de récurrence**, nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $(x_n;y_n)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+8 \\ 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$

$17^2 - 8 \times 6^2 = 289 - 288 = 1$

$p = 6$ $\quad p^2 = 36$ $\quad 2n+1 = 17$ donc $n = 8$

On obtient : 1+2+ . . . +8= 6^2 =**36=N**

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 17 + 8 \times 6 \\ 1 \times 17 + 3 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix}$

$99^2 - 8 \times 35^2 = 9801 - 9800 = 1$

$p = 35$ $\quad p^2 = 35^2 = 1225$ $\quad 2n+1 = 99$ donc $n = 49$

On obtient : 1+2+. . .+n= 35^2 =**1225=N**

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 99 + 8\times 35 \\ 1\times 99 + 3\times 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 577 \\ 204 \end{pmatrix}$$

$577^2 - 8\times 204^2 = 322929 - 322928 = 1$

$p = 204$ $\quad p^2 = 204^2 = 41616$ $\quad 2n+1 = 577$ donc $n = 288$

On obtient : $1+2+...+288 = 204^2 = 41616 = N$

N=41616 est un nombre triangulaire égal à un carré d'un entier et supérieur à 2015.