Exercice 1 4 points

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième. Les parties A,B et C sont indépendantes.
Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont premiers prix, et les autres sont haut de gamme. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas haut de gamme, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans la production. Le responsable du magasin désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock, à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas haut de gamme et en trouve 19 qui sont défectueux.
Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?
On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

2. Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas premier prix. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas premier prix, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.
Donner un intervalle de confiance de cette production au niveau de confiance 95 %.

Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas premier vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu=750$ et d'écart type $\sigma=25$.

1. Calculer $P(725\leqslant X\leqslant 775)$.

2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas premier prix qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. On ne réalimente pas le stock en cours de mois.
Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Partie C

On admet maintenant que, dans le magasin :
. 80 % des cadenas proposés à la vente sont de premier prix, les autres sont de haut de gamme ;
. 3 % des cadenas haut de gamme sont défectueux ;
. 7 % des cadenas premier prix sont défectueux.
On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :
. p la probabilité qu'un cadenas premier prix soit défectueux ;
. H l'événement « le cadenas prélevé est haut de gamme » ;
. D l'événement « le cadenas prélevé est défectueux ».
1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Exprimer en fonction de p la probabilité P(D). En déduire la valeur du réel p. Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question A-2 ?

3. Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas haut de gamme.

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Correction :

Partie A

1. Le nombre de cadenas du stock étant important, on peut considérer que le prélèvement des 500 cadenas de l'échantillon est effectué avec remise.
La probabilité qu'un cadenas pris au hasard soit défectueux est $p=0,03$.
On a donc : $n=500 \geqslant 30$, $n\,p=500\times 0,03=15 \geqslant 5$ et $n(1-p)=500\times 0,97=485 \geqslant 5$.
On peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I=\boxed{\left[p-1,96\times\frac{\sqrt{p\times(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p+1,96\times\frac{\sqrt{p\times(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]}$$

On obtient :

$$I_{500}=\left[0,03-1,96\times\frac{\sqrt{0,03\times 0,97}}{\sqrt{500}}\,;0,03+1,96\times\frac{\sqrt{0,03\times 0,97}}{\sqrt{500}}\right]$$

$1,96\times\frac{\sqrt{0,03\times 0,97}}{\sqrt{500}}=0,015$ à 10^{-3} près

$I_{500}=[0,03-0,015\,;0,03+0,015]=[0,015\,;0,045]$

f est la proportion de cadenas défectueux obtenue dans l'échantillon $f=\frac{19}{500}=0,038$. f appartient à l'intervalle I_{500} , ce contrôle ne remet pas en cause le fait que le stock ne comprend pas plus de 3 % de cadenas défectueux.

2. La proportion de cadenas défectueux dans l'échantillon est : $f=\frac{39}{500}=0,078$.

$n=500 \geqslant 30$, $n\,p=0,078\times 500=39 \geqslant 5$ et $n(1-p)=500\times 0,922=461 \geqslant 5$

L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est :

$$\boxed{J=\left[0,078-\frac{1}{\sqrt{500}}\,;0,078+\frac{1}{\sqrt{500}}\right]}$$

$\frac{1}{\sqrt{500}}=0,045$ à 10^{-3} près.

$\boxed{J=[0,033\,;0,123]}$

Partie B

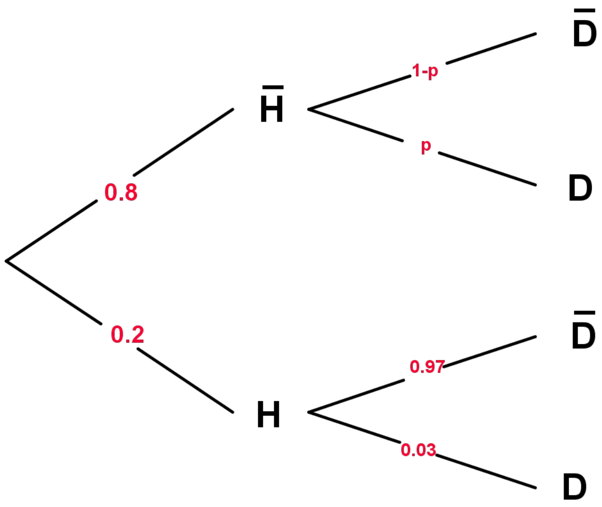
1. X suit la loi normale de moyenne $\mu=750$ et d'écart type $\sigma=25$.
$P(725\leqslant X\leqslant 775)=P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)$
donc $P(725\leqslant X\leqslant 775)=0,683$ à 10^{-3} près. (résultat de cours à connaître)
Remarque
On obtient avec la calculatrice :
$P(725\leqslant X\leqslant 775)=0,6827$ à 10^{-4} près.

2. On veut déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P(n\leqslant X)<0,05$ soit $p(X\leqslant n)\geqslant 0,95$
On obtient avec la calculatrice :
$P(X\leqslant 791)=0,9495$
$P(X\leqslant 792)=0,9535$
donc $n=792$

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Partie C

1. L'énoncé précise :
80 % des cadenas proposés à la vente sont de premier prix.
Donc $P(\bar{H})$ = **0,8** et $P(H)=1-0,8$ = **0,2**
3 % des cadenas haut de gamme sont défectueux.
Donc $P_H(D)$ = **0,03** et $P_H(\bar{D})=1-0,03$ = **0,97**
p est la probabilité qu'un cadenas premier prix soit défectueux.
Donc $P_{\bar{H}}(D)$ = **p** et $P_{\bar{H}}(\bar{D})$ = **1-p**
On obtient l'arbre pondéré :



2. En utilisant **l'arbre pondéré** ou **la formule des probabilités totales**, on obtient :
$P(D)=P(\bar{H})\times P_{\bar{H}}(D)+P(H)\times P_H(D)$
$P(D)=0,8\times p+0,2\times 0,03=0,8p+0,006$
L'énoncé précise $P(D)$ = **0,07**;
Donc, $0,07=0,8p+0,006 \Leftrightarrow 0,064=0,08p \Leftrightarrow p=\dfrac{0,064}{0,8}=0,08$
0,08 **appartient bien à l'intervalle de confiance J**.
Donc **ce résultat est cohérent avec celui de la question A-2**

3. On demande de calculer : $P_{\bar{D}}(H)$
$P_{\bar{D}}(H)=\dfrac{P(\bar{D}\cap H)}{P(\bar{D})}$
$P(\bar{D})=1-p=1-0,08=0,92$
$P(\bar{D}\cap H)=P(H)\times P_H(\bar{D})=0,2\times 0,97=0,194$
$P_{\bar{D}}(H)=\dfrac{0,194}{0,92}$ = **0,211** à 10^{-3} près.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés