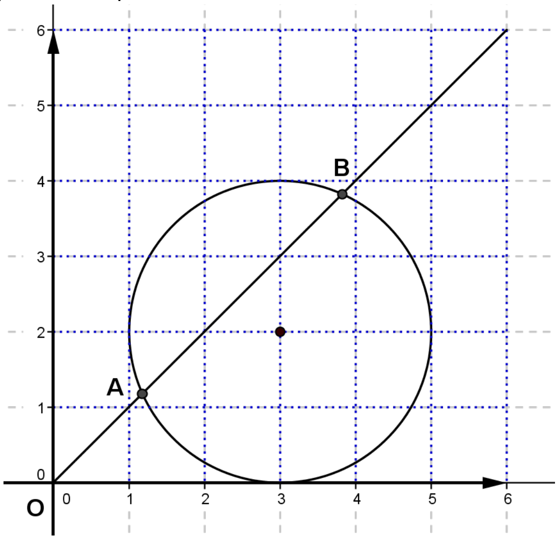
Exercice 2 *4 points*

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé an note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifient les deux conditions : $|z-1|=|z-i|$ et $|z-3-2i|\leqslant 2$.



Sur la figure ci-dessus, on a représenté le cercle de centre le points de coordonnées $(3;2)$ et de rayon 2 et la droite d'équation $y=x$. Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.

Affirmation 1 : L'ensemble S est le segment $[AB]$.

2. Affirmation 2 : Le nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^{1515}$ est un nombre réel.

Pour les questions 3 et 4, on considère les points $E(2;1;-3)$, $F(1;-1;2)$ et $G(-1;3;1)$ dont les coordonnées sont définies dans un repère orthonormé de l'espace.

3. Affirmation 3 : une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :

$$\begin{cases} x=2t \\ y=-3+4t \\ z=7-10t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

4. Affirmation 4 : une mesure en de gré de l'angle géométrique $\widehat{FEG}$ arrondi au degré est 50°.

Correction :

1. AFFIRMATION 1 : **VRAIE**

Justification :

$z=x+\mathrm{i}\,y$ $\quad$ x et y sont des nombres réels

$z-1=x-1+\mathrm{i}\,y$ $\quad$ $|z-1|^2=(x-1)^2+y^2$

$z-\mathrm{i}=x+\mathrm{i}(y-1)$ $\quad$ $|z-\mathrm{i}|^2=x^2+(y-1)^2$

$|z-1|=|z-\mathrm{i}| \Leftrightarrow |z-1|^2=|z-\mathrm{i}|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2-2y+1 \Leftrightarrow -2x=-2y \Leftrightarrow y=x$

Donc l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$ est **la droite Δ d'équation** $y=x$

Soit $\Omega(3;2)$.

$\Omega M=|z-3-2\mathrm{i}|$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3-2\mathrm{i}|\leqslant 2$ est **le disque fermé D de centre Ω et de rayon 2**.

$\boxed{S=\Delta\cap D=[AB]}$

2. AFFIRMATION 2 : **FAUSSE**

Justification :

$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2=3+2\sqrt{3}\mathrm{i}-1=2(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$

$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3=2(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i})=2(\sqrt{3}+3\mathrm{i}+\mathrm{i}-\sqrt{3})=2\times 4\mathrm{i}=8\mathrm{i}=2^3\mathrm{i}$

Or, $1515=3\times 505$

donc, $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{1515}=[(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3]^{505}=(2^3\mathrm{i})^{505}=2^{1515}\times\mathrm{i}^{505}$

Nous savons que $\mathrm{i}^4=1$ et que $505=4\times 126+1$

donc $\mathrm{i}^{505}=(\mathrm{i}^4)^{126}\times\mathrm{i}^1=\mathrm{i}$

Conséquence

$\boxed{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{1515}=2^{1515}\times\mathrm{i}}$ qui est **un imaginaire pur non nul et non un nombre réel**.

3. AFFIRMATION 3 : **VRAIE**

Soit Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2t \\ y=-3+4t \\ z=7-10t \end{cases}$ $\quad t\in\mathbb{R}$

$E(2:1;-3)$ $\begin{cases} 2=2t \\ 1=-3+4t \\ -3=7-10t \end{cases} \Leftrightarrow \{t=1$

donc **E appartient à Δ**.

$F(1;-1;2)$ $\begin{cases} 1=2t \\ -1=-3+4t \\ 2=7-10t \end{cases} \Leftrightarrow \left\{t=\frac{1}{2}\right.$

donc **F appartient à Δ**.

Conséquence

$\Delta=(EF)$

4. AFFIRMATION 4 : **VRAIE**

Justification :

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}$

$EF^2=1+4+25=30$ $EF=\sqrt{30}$

$EG^2=9+4+16=29$

$\overrightarrow{EF}\,.\,\overrightarrow{EG}=3-4+20=19$

$\overrightarrow{EF}\,.\,\overrightarrow{EG}=\sqrt{30}\times\sqrt{29}\cos\widehat{FEG}$

$\cos\widehat{FEG}=\dfrac{19}{\sqrt{30}\sqrt{19}}=0{,}644$ à 10^{-3} près

La calculatrice nous donne : $\widehat{FEG}$ =50°(arrondi au degré).