Exercice 3 *7 points*

Soit a un nombre réel fixé non nul. Le but de l'exercice est étudier la suite (u_n) définie par : $u_0=a$ et pour tout n de N, $u_{n+1}=e^{2u_n}-e^{u_n}$. On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1}=e^{u_n}(e^{u_n}-1)$

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x)=e^{2x}-e^{x}-x$

a. **C**alculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x)=(e^{x}-1)(2e^{x}+1)$

b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c. En remarquant que $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$;

b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n) .

3. Dans cette question on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1 permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}-u_n \geqslant g(a)$

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant a+n\times g(a)$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Dans cette question, on prend a=0,02 ;

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $(u_n)>M$ où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables :	n est un entier
	u et M sont deux réels
Initialisation :	u prend la valeur 0,02
	n prend la valeur 0
	Saisir la valeur de M
Traitement :	Tant que **. . . .**
	. . . .
	. . . .
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a. Sur la copie recopier la partie « traitement » en la complétant.

b. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affiche si M=60.

Correction :

1. $g(x)=e^{2x}-e^{x}-x$

a. g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x)=2e^{2x}-e^{x}-1$

Or pour tout nombre réel x :

$(e^{x}-1)(e^{2x}+1)=2e^{2x}-2e^{x}+e^{x}-1=2e^{2x}-e^{x}-1=g'(x)$

b. Pour tout nombre réel x : $e^{x}>0$ donc $2e^{x}+1>0$ et le signe de $g'(x)$ est le signe de $e^{x}-1$.

$e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$

$e^{x}-1>0 \Leftrightarrow e^{x}>1 \Leftrightarrow x>0$

$e^{x}-1<0 \Leftrightarrow e^{x}<1 \Leftrightarrow x<0$

On donne les variations de g sous la forme d'un tableau mais on ne calcule pas les limites aux bornes.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	
g(x)	$\searrow$		g(0)	$\nearrow$	

g(0) est le minimum de g.

$g(0)=e^{0}-e^{0}-0=0$

Conséquence

Pour tout nombre réel x, $\boxed{g(x)\geqslant g(0)=0}$

c. Pour tout entier naturel n

$u_{n+1}-u_{n}=e^{2u_{n}}-e^{u_{n}}-u_{n}=g(u_{n})$

Or, $g(u_{n})\geqslant 0$

la suite est donc croissante.

2. **a ⩽ 0**

a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_{n}\leqslant 0$

Initialisation

$u_{0}=a\leqslant 0$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_{n}\leqslant 0$ et on doit démontrer $u_{n+1}\leqslant 0$.

Si $u_{n}\leqslant 0$ alors $2u_{n}\leqslant u_{n}$.

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$

donc $e^{2u_{n}}\leqslant e^{u_{n}}$ et $e^{2u_{n}}-e^{u_{n}}\leqslant 0$ soit $u_{n+1}\leqslant 0$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $u_{n}\leqslant 0$.

b. La suite (u_n) est croissante et majorée par 0 donc la suite (u_n) est convergente

c. Si a=0 alors $u_1 = e^0 - e^0 = 0$
donc la suite est nulle et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

3.a. g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
Pour tout entier naturel n
$0 < a \leqslant u_n$
donc $g(0) < g(a) \leqslant g(u_n)$
$g(0) = 0$ et $g(u_n) = u_{n+1} - u_n$
Conclusion
$\boxed{u_{n+1} - u_n \geqslant g(a) > 0}$

b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n :
$u_n \geqslant a + n \times g(a)$

Initialisation
$u_0 = a$ et $a + 0 \times g(a) = a$
donc $u_0 \geqslant a + 0 \times g(a)$
La propriété est vérifiée pour $n = 0$

Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n \geqslant a + n \times g(a)$ et on doit démontrer que $u_{n+1} \geqslant a + (n+1) \times g(a)$
or, on a $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$
donc $u_{n+1} \geqslant u_n + g(a) \geqslant a + n \times g(a) + g(a) = a + (n+1) \times g(a)$

Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant a + n \times g(a)$

c. $a > 0$
donc $g(a) > g(0) = 0$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$
Conclusion
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \boxed{+\infty}$

4. a.

Variables :	n est un entier
	u et M sont deux réels
Initialisation :	u prend la valeur 0,02
	n prend la valeur 0
	Saisir la valeur de M
Traitement :	Tant que $u \leqslant M$
	u prend la valeur $\boxed{e^{2u} - e^u}$
	n prend la valeur n+1
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

b. En utilisant la calculatrice on obtient : n=36

Remarque
Avec un tableur on obtient :

	A	B
1	0	0,02
2	1	0,020609
3	2	0,021257
4	3	0,021946
5	4	0,022681
6	5	0,023466
7	6	0,024308
8	7	0,025211
9	8	0,026183
10	9	0,027233
11	10	0,028369
12	11	0,029603
13	12	0,030949
14	13	0,032421
15	14	0,034038
16	15	0,035822
17	16	0,037802
18	17	0,04001
19	18	0,042487
20	19	0,045287
21	20	0,048474
22	21	0,052135
23	22	0,056382
24	23	0,061366
25	24	0,067293
26	25	0,074455
27	26	0,083271
28	27	0,094377
29	28	0,10877
30	29	0,128109
31	30	0,155357
32	31	0,196325
33	32	0,263977
34	33	0,393362
35	34	0,714234
36	35	2,129681
37	36	62,35267