Exercice 4 — Candidats n'ayant pas suivi la spécialité — 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

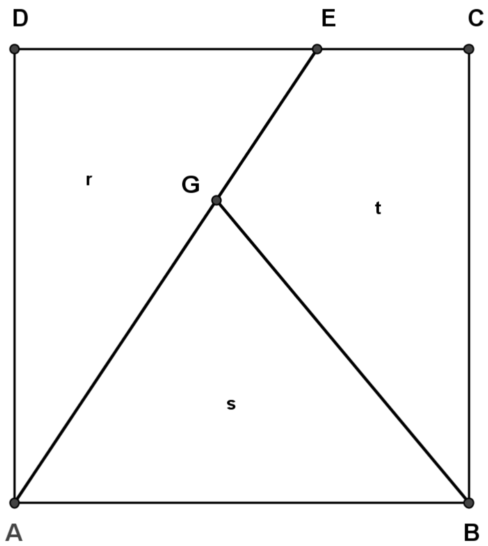
Le fabricant de cadenas de la marque « K » désire imprimer un logo pour son entreprise. Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré ABCD, de côté une unité de longueur et respectant les conditions C_1 et C_2 suivantes :

. Condition C_1 : la lettre K doit être constituée de trois lignes :

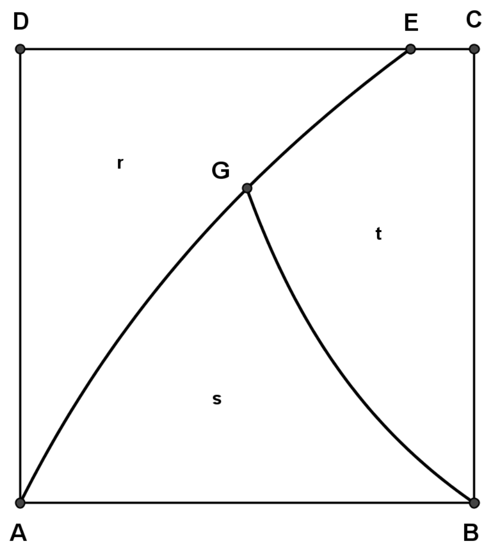
- une des ligne est le segment $[AD]$;
- une deuxième ligne a pour extrémité le point A et un point E du segment $[DC]$;
- la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G de la deuxième ligne.

. Condition C_2 : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre 0,3 et 0,4, l'unité d'aire étant celle du carré ABCD. Ces aires sont notées r, s, t sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans un repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$.

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r=s=t=\frac{1}{3}$

Déterminer les coordonnées de E et G.

Partie B : étude de la proposition B

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :

. la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par : $f(x)=\ln(2x+1)$.

. la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x \neq 0$ par : $g(x) = k\dfrac{1-x}{x}$ où k est un réel positif qui sera déterminé.

1.a. Déterminer les coordonnées du point E.
b. Déterminer la valeur de du réel k, sachant que l'abscisse du point G est égale à 0,5.

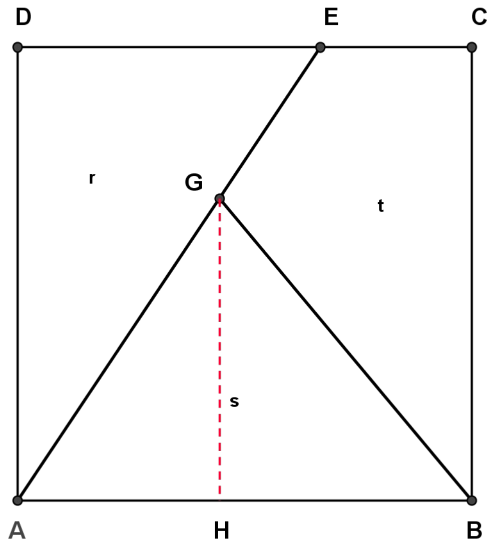
2.a. Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :
$F(x) = (x+0{,}5) \times \ln(2x+1) - x$
b. Démontrer que $r = \dfrac{e}{2} - 1$.

3. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que : $s = (\ln(2))^2 + \dfrac{\ln(2)-1}{2}$
La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?

Correction :

Partie A : étude de la proposition A



. L'aire du triangle ADE rectangle en D est r.

$$r=\frac{AD\times DE}{2}$$

$$r=\frac{1}{3} \text{ et } AD=1 \text{ donc } DE=2r=\frac{2}{3}$$

L'abscisse du point E est : $\frac{2}{3}$ et son ordonnée est:1.

$$\boxed{E\left(\frac{2}{3};1\right)}$$

. L'aire du triangle ABG est s.

$$s=\frac{AB\times GH}{2}$$

GH est la hauteur du triangle ABG issue de G.

$$s=\frac{1}{3} \text{ et } AB=1 \text{ donc } GH=2s=\frac{2}{3}.$$

L'ordonnée de G est $\frac{2}{3}$.

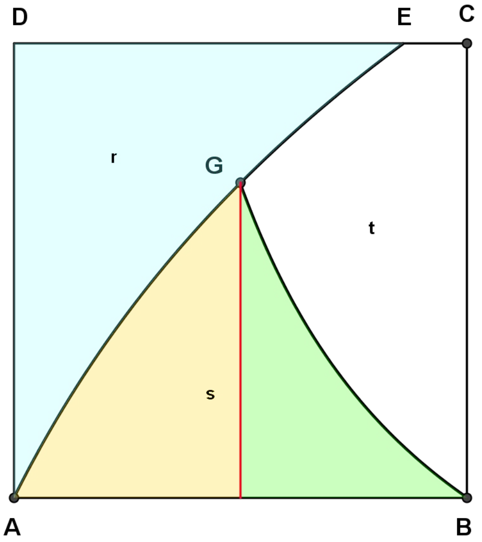
Pour déterminer l'abscisse de G, on détermine une équation de la droite (AE).

$$(AE): y=ax+b \quad A(0;0) \quad E\left(\frac{2}{3};1\right)$$

$$a=\frac{1-0}{\frac{2}{3}-0}=\frac{3}{2} \text{ et } b=0$$

$$(AE): y=\frac{3}{2}x \qquad G\left(x_G;\frac{2}{3}\right) \qquad \frac{2}{3}=\frac{3}{2}x_G \text{ donc } x_G=\frac{4}{9} \qquad \boxed{G\left(\frac{4}{9};\frac{2}{3}\right)}.$$

Partie B : étude de la proposition B



1.a. Pour tout nombre réel x positif ou nul
$f(x)= \ln(2x+1)$
L'ordonnée du point E est 1 et E appartient à la courbe représentative de f.
$1=\ln(2x+1) \Leftrightarrow e=2x+1 \Leftrightarrow x=\frac{e-1}{2}$

(remarque : $0<\frac{e-1}{2}<1$)

$\boxed{E\left(\frac{e-1}{2};1\right)}$

b. L'abscisse du point G est 0,5 et G appartient à la courbe représentative de f donc son ordonnée est : $f(0,5)$
$f(0,5)=\ln(2\times 0,5+1)=\ln 2$
$G(0,5;\ln 2)$
G appartient aussi à la courbe représentative de g donc $g(0,5)=\ln 2$.
$g(0,5)=k\times\frac{1-0,5}{0,5}=k=\ln 2$

$\boxed{g(x)=(\ln 2)\times\frac{1-x}{x}}$

2.a. Pour tout nombre réel x positif ou nul, $F(x)=(x+0,5)\times\ln(2x+1)-1$
F est **dérivable** sur $[0;+\infty[$
Rappel : $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$ donc $(\ln(2x+1))'=\frac{2}{2x+1}$
$F'(x)=1\times\ln(2x+1)+(x+0,5)\times\frac{2}{2x+1}-1=\ln(2x+1)+\frac{2x+1}{2x+1}-1=\ln(2x+1)=f(x)$
F est **une primitive de f** sur $[0;+\infty[$
b. r est l'aire du domaine plan compris entre la droite d'équation $y=1$, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x=1$ et $x=\frac{e-1}{2}$. (Domaine coloré en bleu clair sur le dessin)

Donc, r = $\int_0^{\frac{e-1}{2}} (1-f(x))\,dx$

Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x)=1-f(x)$

H définie par $\boxed{H(x)=x-F(x)}$ est **une primitive** de h sur $[0;+\infty[$

$r=H\left(\frac{e-1}{2}\right)-H(0)$

$H(x)=2x-(x+0{,}5)\times\ln(2x+1)-0$

$r=2\times\left(\frac{e-1}{2}\right)-\left(\frac{e-1}{2}+0{,}5\right)\times\ln(e-1+1)-0=e-1-\frac{e}{2}=\frac{e}{2}-1$

$\boxed{r=\frac{e}{2}-1}$

3. Pour tout nombre réel x positif ou nul :

$g(x)=(\ln 2)\times\frac{1-x}{x}=(\ln 2)\times\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{\ln 2}{x}-\ln 2$

donc la fonction G définie sur $[0;+\infty[$ par : $G(x)=(\ln 2)\times\ln x-x\ln 2$ est **une primitive de g**.

4. On admet que $s=(\ln(2))^2+\frac{\ln(2)-1}{2}$

Justification non demandée

L'aire s est égale à la somme de l'aire de la partie de plan colorée en jaune et de l'aire de la partie de plan colorée en vert

$s=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx+\int_{½}^{1} g(x)\,dx$

$s=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)+G(1)-G\left(\frac{1}{2}\right)$

$s=\ln 2-0{,}5-0-\ln 2-(\ln 2)\times\left(\ln\frac{1}{2}\right)+0{,}5\times\ln 2$

or, $\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$

$s=(\ln(2))^2+0{,}5\times(\ln 2-1)=(\ln(2))^2+\frac{\ln 2-1}{2}$

r=**0,359** à 10^{-3} près

s=**0,327** à 10^{-3} près

t=1–r–s=**0,314** à 10^{-3} près

La proposition vérifie bien les conditions imposées par le client.