Exercice 4 **Candidats ayant suivi la spécialité** *5 points*

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x;y;z)$ tels que : $x^2+y^2=z^2$. Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».
Ainsi $(3;4;5)$ est un TP car $3^2+4^2=9+16=25=5^2$.

Partie A : généralités

1. Démontrer que si $(x;y;z)$ est un TP et si p est un entier naturel non nul, alors le triplet $(\mathrm{p}x;\mathrm{p}y;\mathrm{p}z)$ est aussi un TP.

2. Démontrer que, si $(x;y;z)$ est un TP alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire de façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair.
$\mathrm{n}=2^{\alpha}\times\mathrm{k}$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.
L'écriture $\mathrm{n}=2^{\alpha}\times\mathrm{k}$ est nommée *décomposition* de n.
Voici par exemple les *décompositions* des entiers 9 et 120 : $9=2^0\times9$ et $120=2^3\times15$.
a. Donner la *décomposition* de l'entier 192.
b. Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les *décompositions* sont :
$x=2^{\alpha}\times\mathrm{k}$ et $y=2^{\beta}\times\mathrm{m}$.
Écrire la *décomposition* des entiers naturels $2x^2$ et z^2 .
c. En examinant l'exposant de 2 dans la *décomposition* de $2x^2$ et dans celle de z^2 , montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x;z)$ tels que $2x^2=z^2$.
On admet que la question A.3, permet d'établir que les trois entiers naturels x,y et z sont deux à deux distincts.
Comme de plus les entiers naturels x et y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x:y;z)$, les trois entiers naturels sont rangés dans l'ordre suivant : $x<y<z$

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x;y;2015)$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, $(2\mathrm{n}+1)^2+(2\mathrm{n}^2+2\mathrm{n})^2=(2\mathrm{n}^2+2\mathrm{n}+1)^2$. Déterminer un TP de la forme $(2015;y;z)$

3.a. En remarquant que $403^2=169\times961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls $(x;z)$ tels que : $z^2-x^2=403^2$, avec $x<403$.
b. En déduire un TP de la forme $(x;2015;z)$.

Correction :

Partie A : généralités

1. Si $(x;y;z)$ est un TP alors $x^2+y^2=z^2$.
Pour tout nombre entier naturel non nul p on obtient $p^2x^2+p^2y^2=p^2z^2$.
Soit $(px)^2+(py)^2=(pz)^2$ donc $(px;py;pz)$ est **un TP**.

2. si x est un nombre impair alors $x\equiv 1(2)$ donc $x^2\equiv 1^2(2)$ soit $x^2\equiv 1(2)$
de même $y^2\equiv 1(2)$ et $z^2\equiv 1(2)$
On a donc $x^2+y^2\equiv 0(2)$ et $z^2\equiv 1(2)$
Conséquence
On ne peut pas avoir : $x^2+y^2=z^2$
Conclusion
Si $(x;y;z)$ est **un TP on ne peut pas avoir les trois entiers naturels x ; y et z impairs**.

3.a. On peut décomposer 192 en produit de facteurs premiers ou on peut remarquer que $192=3\times 64=2^6\times 3$
donc, $\boxed{\alpha=6}$ et $\boxed{k=3}$

b. $x=2^{\alpha}\times k$ $\qquad k\equiv 1(2)$
$x^2=(2^{\alpha}\times k)^2=2^{2\alpha}\times k^2$ et $k^2\equiv 1(2)$
donc, k^2 est **un nombre impair**.
On obtient pour *décomposition* de $2x^2$:
$2x^2=2^{2\alpha+1}\times k^2$
$z=2^{\beta}\times m$ $\qquad m\equiv 1(2)$
$z^2=2^{2\beta}\times m^2$ $\qquad m^2\equiv 1(2)$

c. Si $2x^2=z^2$ alors $2^{2\alpha+1}\times k^2=2^{2\beta}\times m^2$
La décomposition étant unique, on devrait avoir $2\alpha+1=2\beta$ et $k^2=m^2$
Or, on ne peut pas avoir $2\alpha+1=2\beta$ donc on ne peut pas avoir $2x^2=z^2$
Conséquence
Si $(x;y;z)$ **est un TP** on **ne peut pas** avoir $x=y$ donc **x, y et z sont distincts deux à deux**.
On suppose que $x<y<z$.

Partie B : recherche de triplets pythagoriens contenant l'entier 2015

1. On décompose 2015 en produit de facteurs premiers : $2015=5\times 13\times 31$.
Nous savons que $(3;4;5)$ est un TP.
Soit $p=13\times 31$ et $(403\times 3;403\times 4;403\times 5)$ est un TP.
On obtient $\boxed{(1209;1612;2015)}$ **comme TP**.

2. on choisit : $2n+1=2015$ soit $2n=2014$ et $n=1007$
$x=2015$
$y=2n^2+2n=2\times 1007^2+2\times 1007+1=2030113$
$z=2n^2+2n+1=2\times 1007^2+2\times 10017+1=2030114$
On obtient $\boxed{(2015;2030113;2030114)}$ **comme TP**.

3. $403=13\times 31$
$403^2=13^2\times 31^2=169\times 961$
$z^2-x^2=403^2\Leftrightarrow (z-x)(z+x)=169\times 961$

On peut choisir : $\begin{cases} z-x=169 \\ z+x=961 \end{cases}$

$2z=1130$ donc $z=565$

$2x=792$ donc $x=396$

On a $565^2-396^2=403^2$

soit $396^2+403^2=565^2$ et $\boxed{(396;403;565)}$ est un TP.

On considère $p=5$

$(5\times 396)^2+(5\times 403)^2=(5\times 565)^2$

$x=5\times 396=1980$

$y=5\times 403=2015$

$z=5\times 565=2825$

$\boxed{(1980;2015;2825)}$ est un TP.