Exercice 1 6 points

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif donné. On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

a. Soit c et d deux nombres réels tels que $0\leqslant c<d$.
Démontrer que la probabilité $P(c\leqslant X\leqslant d)$ vérifie $P(c\leqslant X\leqslant d)=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$.

b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X>20)$ soit égale à 0,05.

c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

Dans la suite de l'exercice on prend λ =0,15

d. Calculer $P(10\leqslant X\leqslant 20)$

e. Calculer la probabilité de l'événement $X>18$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.

a. Calculer la probabilité de l'événement $(20\leqslant Y\leqslant 21)$

b. Calculer la probabilité de l'événement $(Y<11)\cup(Y>21)$.

Partie 2

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant. Les bons d'achat sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de rouge et trois quart de bons verts. Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec la probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.
De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1. Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

2. Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} prés de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros. Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achat dans les différents magasins de la chaîne.
Ses doutes sont-ils justifiées ?

Correction :

Partie 1

1.a. La densité de probabilité de X est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$
(λ est un réel strictement positif donné).

On a donc $P(c\leqslant X\leqslant d)=\int_c^d f(x)dx$.

F définie par $F(x)=-e^{-\lambda x}$ est **une primitive de f** sur $[0;+\infty[$.
Et, $P(c\leqslant X\leqslant d)=F(d)-F(c)=-e^{-\lambda d}+e^{-\lambda c}=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$

b. $P(X>20)=1-P(0\leqslant X\leqslant 20)=1-\int_0^{20} f(x)dx=1-e^0-e^{-20\lambda}=e^{-20\lambda}$

$e^{-20\lambda}=0{,}05\Leftrightarrow -20\lambda=\ln(0{,}05)\Leftrightarrow\lambda=-\frac{\ln(0{,}05)}{20}$ $=$ **0,150** à 10^{-3} près.

c. L'espérance mathématique d'une variable de loi exponentielle de paramètre λ est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

Pour X, $E(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0{,}15}$ $=$ **6,667** à 10^{-3} près.

d. $P(10\leqslant X=20)=-\lambda\times 10-e^{-\lambda\times 20}=e^{-1{,}5}-e^{-3}$ $=$ **0,173** à 10^{-3} près.

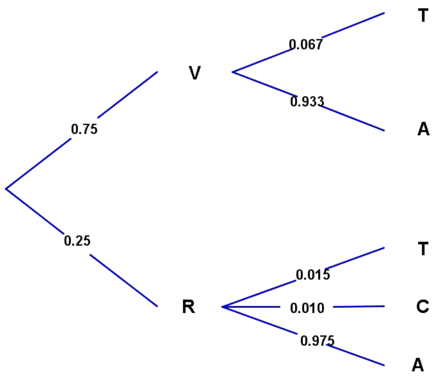
e. $P(X>18)=e-1{,}8\times 1{,}5$ $=$ **0,067** à 10^{-3} près.

2. La variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart-type 1,95.
En utilisant la calculatrice, on obtient :
a. $P(20\leqslant Y\leqslant 21)$ $=$ **0,015** à 10^{-3} près.
b. $P(Y<11)\cup(Y>21)=1-P(11\leqslant Y\leqslant 21)$ $=$ **0,010** à 10^{-3} près.

Partie 2

On note les événements suivants :
R l'événement : « le client reçoit un bon d'achat rouge »
V l'événement : « le client reçoit un bon d'achat vert »
T l'événement : « le client reçoit un bon d'achat de 30€ »
C l'événement : « le client reçoit un bon d'achat de 100€ »
A l'événement : « le client reçoit un bon d'achat d'un autre montant que 30€ et 100€ »
On a $V=\bar{R}$ et $\bar{A}=T\cup C$
L'énoncé précise :
$P(A)=\frac{1}{4}$ $=$ **0,25** et $P(V)=\frac{3}{4}$ $=$ **0,75**
$P_V(T)$ $=$ **0,067** et $P_V(\bar{T})=P_V(A)=1-0{,}067$ $=$ **0,933**
$P_R(T)$ $=$ **0,015** et $P_R(C)$ $=$ **0,010**
donc $P_R(A)=1-P_R(T)-P_R(C)=1-0{,}015-0{,}010$ $=$ **0,975**

On peut construire un arbre pondéré :



1. On nous demande de calculer : $P_R(T)$
L'énoncé nous donne : $P_R(T)$ =**0,015**

2. S est l'événement : « le client reçoit un bon d'achat d'un montant supérieur ou égal à 30€ »
$S=T\cup C$ et $\overline{S}=A$
En utilisant **l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales** :
$P(A)=P(V\cap A)+P(R\cap A)=0,75\times 0,933+0,25\times 0,975=0,9435$
$P(S)=1-P(A)=1-0,9435=0,0565$
$P(S)$ =**0,057** à 10^{-3} près.

3. Le nombre de clients du magasin étant très important, on peut admettre que le choix de l'échantillon de 200 personnes peut-être considéré comme un tirage avec remise.
$P(S)=0,057$
$n=200\geqslant 30$ $np=11,4\geqslant 5$ $n(1-1p)=186,6\geqslant 5$.
On considère l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I=\left[p-1,96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1,96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$I=\left[0,057-1,96\times\frac{\sqrt{0,057\times 0,943}}{\sqrt{200}};0,057+1,96\times\frac{\sqrt{0,057\times 0,943}}{\sqrt{200}}\right]$$

Or, $1,96\times\frac{\sqrt{0,057\times 0,943}}{\sqrt{200}}$ =**0,032** à 10^{-3} près

I=$\boxed{[0,025;0,089]}$

La fréquence de clients recevant un bon d'achat d'une valeur supérieure à 30€ dans l'échantillon de 200 personnes est $f=\frac{6}{200}=0,03$. Cette valeur appartient à l'intervalle I donc au seuil de 95 %, **les doutes du directeur ne sont pas justifiées**.