Exercice 2 — 3 points

Dans un repère orthonormé $(O;I;J;K)$ d'unité 1 cm, on considère les points :
$A(0;-1;5)$ $B(2;-1;5)$ $C(11;0;1)$ $D(11;4;4)$.
Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
A l'instant t=0 le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t , les positions M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel strictement positif.
On admet que M_t et N_t , ont pour coordonnées $M_t(t;-1;5)$ et $N_t(11;0{,}8t;1+0{,}6t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1.a. La droite (AB) est parallèles a l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel?
On donnera une équation de ce plan $\mathscr{P}$.

c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathscr{P}$, coupe ce plan au point $E(11;-1:5)$.

d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2.a. Montrer que $M_tN_t^2=2t^2-25{,}2t+138$

b. A quel instant t, la distance M_tN_t est-elle minimale ?

Correction :

$M_t(t;-1;5)$ $N_t(11;0,8t;1+0,6t)$
On vérifie :
Pour t=0 $M_0=A$ et pour t=2 $M_2=B$
Pour t=0 $N_0=C$ et pour t=5 $N_5=D$

1.a. $A(0;-1;5)$ $B(2;-1;5)$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OI}$

Donc, la droite (AB) est **parallèle à la droite** (OI).
b. Rappels
(OIJ) : $z=0$
(OIK) : $y=0$
(OJK) : $x=0$

$C(11;0;1)$ $D(11;4;4)$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{OJ}+3\overrightarrow{OK}$

Donc, la droite (CD) est **parallèle au plan** (OJK).
$\mathscr{P}$ a pour équation $x=k$.
C et D appartiennent à $\mathscr{P}$ donc $k=11$ et $\mathscr{P}$: $\boxed{x=11}$.
c. Le vecteur $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
Le vecteur $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de (AB)
Donc, la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

On considère la représentation paramétrique de (AB) : $\begin{cases}x=\lambda\\ y=-1\\ z=5\end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathscr{P}$, on résout le système :

$\begin{cases}x=11\\ x=\lambda\\ y=-1\\ z=5\end{cases}$ donc $\boxed{\lambda=11}$ et $\boxed{E(11;-1;5)}$

d. La droite (CD) est contenue dans $\mathscr{P}$ et (AB) est sécante au plan $\mathscr{P}$ en $E(11;-1;5)$
Donc, les droites (CD) et (AB) sont **sécantes** si et seulement si **E appartient à (CD)**.

On considère la représentation paramétrique de (CD) : $\begin{cases}x=11\\ y=4\mu\\ z=3\mu\end{cases}$ $\mu\in\mathbb{R}$

$E(11;-1;5)$

$\begin{cases}11=11\\ -1=4\mu\\ 5=3\mu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu=-\dfrac{1}{4}\\ \mu=\dfrac{5}{3}\end{cases}$ donc **E n'appartient pas à (CD)**.

Conclusion
Les droites (AB) et (CD) **ne sont pas sécantes**

2.a. $M_t(t;-1;5)$ et $N_t(11;0,8t:1+0,6t)$

$\overrightarrow{M_t N_t}\begin{pmatrix} 11-t \\ 0{,}8\,t+1 \\ 1+0{,}6\,t-5 \end{pmatrix}$

le repère est orthonormé donc

$M_t N_t^2=(11-t)^2+(0{,}8\,t+1)^2+(0{,}6\,t-4)^2=121+t^2-22\,t+0{,}64\,t^2+1+1{,}6\,t+0{,}36\,t^2+16-4{,}8\,t$

$\boxed{M_t N_t^2=2\,t^2-25{,}2\,t+138}$

b. On étudie les variations de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(t)=2\,t^2-25{,}2\,t+138$

f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$f'(t)=4\,t-25{,}2$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{25{,}2}{4}=6{,}3$

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau :

t	0		6.3		$+\infty$
f '(t)		-	0	+	
f (t)		↘		↗	

Le **minimum de f** est obtenu pour **6,3**.

$M_t N_t=\sqrt{f(t)}$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Donc **la distance minimale est obtenue pour 6,3 secondes**.

Remarque

On ne demande pas de calculer la distance minimale.