Exercice 3 — Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z : $z^2-8z+64=0$.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0;\vec{u};\vec{v})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=4+4i\sqrt{3}$, $b=4-4i\sqrt{3}$ et $c=8i$.
a. Calculer le module et un argument du nombre a
b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
c. Montrer que les points A,B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
d. Placer les points A,B et C dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice on pourra s'aider de la figure de la question 2.d complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a'=a\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, $b'=b\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c'=c\,e^{i\frac{ù\pi}{3}}$.
a. Montrer que $b'=8$.
b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a'=-4+4i\sqrt{3}$ et $c'=-4\sqrt{3}+4i$

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment [MN] a pour affixe $\frac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.
a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.
Calculer r et s.

On admet que $t=2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})$.
b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

Correction :

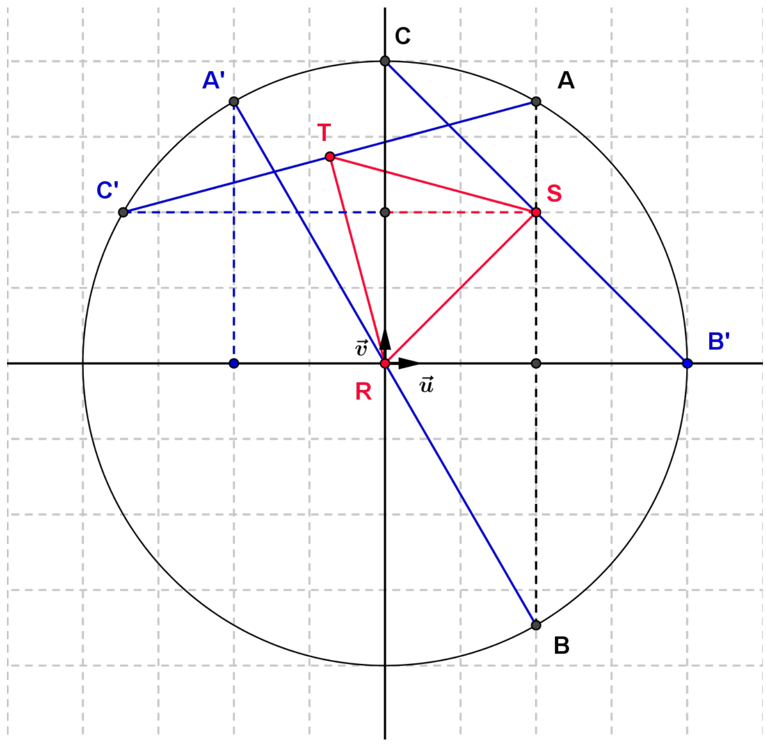
1. On considère l'équation (E) :
$z^2-8z+64=0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
$\Delta=(-8)^2-4\times 64\times 1=-3\times 64=(8\sqrt{3}\mathrm{i})^2$
donc, l'équation (E) **admet deux solutions complexes conjuguées**.
$z_1=\dfrac{8-8\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=4-4\sqrt{3}\,i$ et $z_2=4+4\sqrt{3}\mathrm{i}$
$\boxed{\mathrm{S}=\{z_1;z_2\}}$

2. $\mathrm{a}=4+4\mathrm{i}\sqrt{3}$ $\quad \mathrm{b}=4-4\mathrm{i}\sqrt{3}$ $\quad \mathrm{c}=8\mathrm{i}$
a. $|\mathrm{a}|^2=16+16\times 3=4\times 16=64=8^2$
$|a|=$ **8**
$\mathrm{a}=8\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Si θ est un argument de a :
$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\theta=\dfrac{\pi}{3}\quad(2\pi)$
$\dfrac{\pi}{3}$ **est un argument de a**.

b. $\mathrm{a}=8\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$
b est **le conjugué de a**
$|b|=|a|=$ **8**
et, arg(b)=-arg(a) (2π)
donc, $\boxed{\mathrm{b}=8^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

c. $|c|=$ **8**
On a donc **OA=OB=OC=8**
Les points A, B et C **appartiennent au cercle de centre O et de rayon 8**.

d. On place les points les points A, B et C dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.



3. $a'=a\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ $b'=b\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ $c'=c\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

a. $b=8\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $b'=8\,e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}=8\,e^{i\times 0}$ =<u>8</u>

b. $a'=8\,e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}=8\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Donc, $|a'|$ =<u>8</u> et arg(a')= $\frac{2\pi}{3}$ (2π)

On admet que : $a'=-4+4i\sqrt{3}$ et $c'=-4\sqrt{3}+4i$

4.a. R est <u>**le milieu**</u> de $[A'B]$

$A'(-4+4i\sqrt{3})$ $B(4-4i\sqrt{3})$

$r=\frac{-4+4i\sqrt{3}+4-4i\sqrt{3}}{2}=0$

Donc, <u>**R=O**</u>

S est <u>**le milieu**</u> de $[B'C]$

$B'(8)$ $C(8i)$

$s=\frac{8+8i}{2}=4+4i$

$\boxed{S(4+4i)}$

On admet que $t=2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})$

$T(2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3}))$

b. Conjecture
Le triangle **RST est équilatéral**.
justification

RS= $|s-r|$
$s-r=4+4i-0=4+4i$
$RS^2=|s-r|^2=16+16=\mathbf{32}$

RT= $|t-r|$
t–r= $2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})-0=2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})$
$RT^2=|t-r|^2=(2-2\sqrt{3})^2+(2+2\sqrt{3})^2=4+12-8\sqrt{3}+4+12+8\sqrt{3}=\mathbf{32}$

ST= $|t-s|$
t–s= $2-2\sqrt{3}+i(-2+2\sqrt{3})-4-4i=-2-2\sqrt{3}+i(-2+2\sqrt{3})$
$ST^2=|t-s|^2=(-2-2\sqrt{3})^2+(-2+2\sqrt{3})^2=4+12+8\sqrt{3}+4+12-8\sqrt{3}=\mathbf{32}$
Conclusion
$RS^2=RT^2=ST^2=32$
donc, $RS=RT=ST=4\sqrt{2}$
et **le triangle RST est équilatéral.**