Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$: $7x-5y=1$

a. Vérifier que le couple $(3;4)$ est solution de (E).

b. Montrer que le couple $(x;y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x-3)=5(y-4)$.

c. Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x;y)$ d'entiers relatifs tels que : $\begin{cases} x=5k+3 \\ y=7k+4 \end{cases}$ où $k\in\mathbb{Z}$.

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $7x-5y=1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. A chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.
Lorsqu'on est en A :
. si le jeton tiré est rouge, le pion va en B
. si le jeton tiré est vert, le pion va en C
. si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.
Lorsqu'on est en B :
. si le jeton tiré est rouge, le pion va en A
. si le jeton tiré est vert, le pion va en C
. si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.
Lorsqu'on est en C :
. si le jeton tiré est rouge, le pion va en A
. si le jeton tiré est vert, le pion va en B
. si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

Au départ, le pion est sur le sommet A.

Pour un entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape n.

On note X_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ et T la matrice $\begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$.

Donner la matrice ligne X_0 et montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1}=X_nT$.

4. On admet que $T=PDP^{-1}$ où $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$.

a. A l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice P. On pourra remarquer qu'ils sont entiers.

b. Montrer que $T^n=PD^nP^{-1}$.

c. Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n.

On note α_n , β_n et γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n , ainsi :

$$T^n=\begin{pmatrix}\alpha_n & \beta_n & \gamma_n\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}$$

On admet que $\alpha_n=\frac{3}{10}+\frac{7}{10}\times 0{,}6^n$ et $\beta_n=\frac{37-77\times 0{,}6^n+40\times 0{,}56^n}{110}$.

On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième ligne et ceux de la troisième ligne.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n=X_0T^n$.

a. Déterminer les nombres a_n , b_n à l'aide des coefficients α_n et β_n . En déduire c_n .

b. Déterminer les limites des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .

c. Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retrouver après un très grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire ?

Correction :

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$: $7x-5y=1$

a. $7\times3-5\times4=21-20=1$

Donc, le couple $(3;4)$ est **solution de l'équation (E)**.

b. Sachant que $7\times3-5\times4=1$

Le couple $(x;y)$ est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $7x-5y=1 \Leftrightarrow 7x-5y=7\times3-5\times4$ $\Leftrightarrow$ $7x-7\times3=5y-5\times4$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{7(x-3)=5(y-4)}$

c. 5 et 7 sont premiers entre eux.

7 divise $5(y-4)$ et 7 est premier avec 5, **le théorème de Gauss** nous permet d'affirmer que 7 divise $(y-4)$, c'est à dire il existe un entier relatif k tel que $y-4=7\text{k}$ ou $y=7\text{k}+4$ donc l'équation peut s'écrire $7(x-3)=5\times7\text{k}$ et $x-3=5\text{k}$ ou $\boxed{x=5\text{k}+3}$.

Réciproquement

Pour **tout** entier relatif k, $7(5\text{k}+3)-5(7\text{k}+4)=35\text{k}+21-35\text{k}-20=1$

Donc, $(5\text{k}+3;7\text{k}+4)$ est solution de l'équation (E).

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des couples $(x;y)$ tels que :

$$\begin{cases} x=5\text{k}+3 \\ y=7\text{k}+4 \end{cases} \text{k}\in\mathbb{Z}$$

2. On doit avoir $0\leqslant x$ et $0\leqslant y$ et $x+y\leqslant25$

donc $0\leqslant\text{k}$ et $12\text{k}\leqslant13$ soit $\text{k}\leqslant1$

. Pour $\text{k}=0$ $\quad x=3 \quad y=4$

donc **3 jetons rouges** et **4 jetons verts** et $25-7=$ **18 jetons blancs**.

. Pour $\text{k}=1$ $\quad x=8 \quad y=11$

donc **8 jetons rouges** et **11 jetons verts** et $25-19=$ **6 jetons blancs**.

Dans la suite, on suppose qu'il y a 3 jetons rouges, 4 jetons verts et 18 jetons blancs.

3. On tire au hasard et avec remise un jeton parmi les 25 jetons.

. Il y a 3 jetons rouges donc la probabilité d'obtenir un jeton rouge est : $\boxed{\frac{3}{25}=0{,}12}$.

. Il y a 4 jetons verts donc la probabilité d'obtenir un jeton vert est : $\boxed{\frac{4}{25}=0{,}16}$.

. Il y a 18 jetons blancs donc la probabilité d'obtenir un jeton blanc est : $\boxed{\frac{18}{25}=0{,}72}$.

Remarque

$0{,}12+0{,}16+0{,}72=1$

On note A_n l'événement : « après le $n^{ième}$ tirage le pion se trouve au point A ». De même pour B_n et C_n .

On a $P(A_n)=a_n$; $P(B_n)=b_n$ et $P(C_n)=c_n$

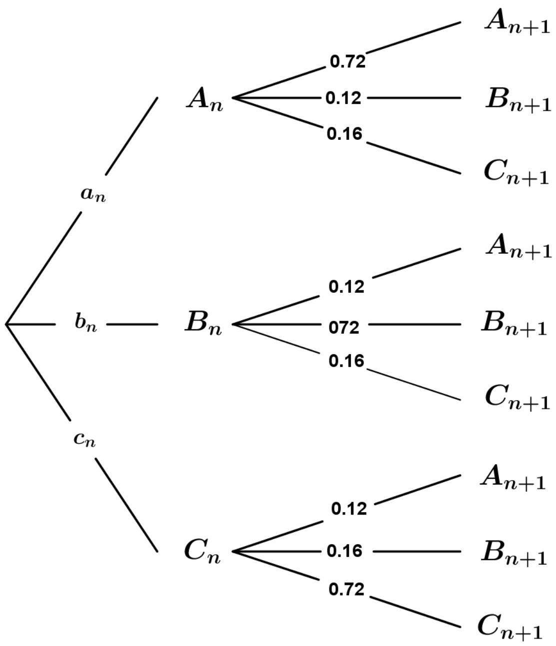
Pour tout entier naturel n : $a_n+b_n+c_n=1$

Dans cet exercice, on utilise les matrices lignes.

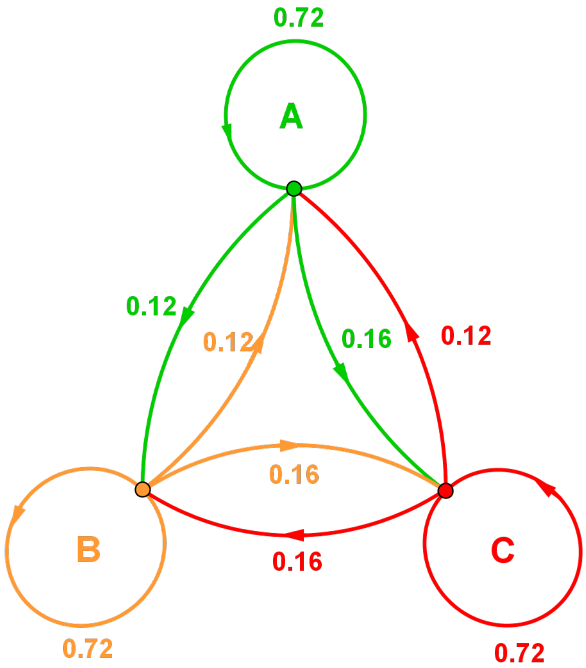
$X_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n & c_n\end{pmatrix}$

Au départ le pion se trouve en A donc $a_0=1$; $b_0=0$ et $c_0=0$ et $X_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Pour calculer a_{n+1} ; b_{n+1} et c_{n+1} , on peut utiliser la formule des probabilités totales ou un arbre pondéré.



ou un graphe probabiliste



On obtient :

$a_{n+1}=P(A_{n+1})=0{,}72\,a_n+0{,}12\,b_n+0{,}12\,c_n$

$b_{n+1}=P(B_{n+1})=0{,}12\,a_n+0{,}72\,b_n+0{,}16\,c_n$

$c_{n+1}=P(C_{n+1})=0{,}16\,a_n+0{,}16\,b_n+0{,}72\,c_n$

En utilisant la définition du produit d'une matrice ligne par une matrice carrée, on obtient :

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}12 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}72 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}72 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix}$$

On **obtient bien la matrice T**.
Et pour tout entier naturel n : $\boxed{X_{n+1}=X_n T}$

4. On admet que $T=PDP^{-1}$

avec $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}56 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$

a. La matrice P est la matrice inverse de P^{-1} donc $P=\left(P^{-1}\right)^{-1}$

En utilisant la calculatrice on obtient : $P=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

Vérification non demandée

$$PDP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}56 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 4{,}2 & 2{,}24 \\ 1 & -1{,}8 & 2{,}24 \\ 1 & -1{,}8 & -3{,}92 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}72 & 0012 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}72 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}72 \end{pmatrix}=T$$

b. On veut démontrer en utilisant **un raisonnement par récurrence** que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $T^n=PD^nP^{-1}$.

Initialisation
Pour n=1, on admet que $T=PDP^{-1}$ donc $T^1=PD^1P^{-1}$.
La propriété est vérifiée pour n=1.

Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que : $T^n=PD^nP^{-1}$ et on doit démontrer que : $T^{n+1}=PD^{n+1}P^{-1}$.
On a $T^{n+1}=T^n\times T^1$
Or, $T^n=PD^nP^{-1}$ et $T^1=PD^1P^{-1}$
$T^{n+1}=\left(PD^nP^{-1}\right)\times\left(PD^1P^{-1}\right)=PD^n\left(P^{-1}P\right)D^1P^{-1}=PD^nID^1P^{-1}=P\left(D^nD^1\right)P^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour entier naturel non nul n : $T^n = P D^n P^{-1}$.

c. Pour tout entier naturel non nul n :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}56^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}56^n \end{pmatrix}$$

5. Pour tout entier n : $X_n = X_0 T^n$

a. $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{pmatrix}$

donc $a_n = \alpha_n$; $b_n = \beta_n$ et $c_n = \gamma_n$

$c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$

Conclusion

$a_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0{,}6^n \qquad b_n = \frac{37 - 77 \times 0{,}6^n + 40 \times 0{,}56^n}{110}$

$c_n = 1 - a_n - b_n = \frac{110}{110} - \frac{33}{110} - \frac{77}{110} \times 0{,}6^n - \frac{37}{110} + \frac{77}{110} \times 0{,}6^n - \frac{40}{110} \times 0{,}56^n$

$c_n = \frac{40}{110} - \frac{40}{110} \times 0{,}56^n = \frac{4}{11} - \frac{4}{11} \times 0{,}56^n$

b. $0 \leqslant 0{,}6 < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} 0{,}6^n = 0$

et $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{3}{10}$

$0 \leqslant 0{,}56 < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} 0{,}56^n = 0$

et $\lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{37}{110}$

et $\lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{4}{11}$

c. $\frac{3}{10} = \frac{33}{110} < \frac{37}{110} < \frac{40}{110} = \frac{4}{11}$

Lorsque n est très grand, la probabilité que le pion se trouve en C est la plus grande des trois probabilités donc le pion a « **plus de chance de ce retrouver en C** ».