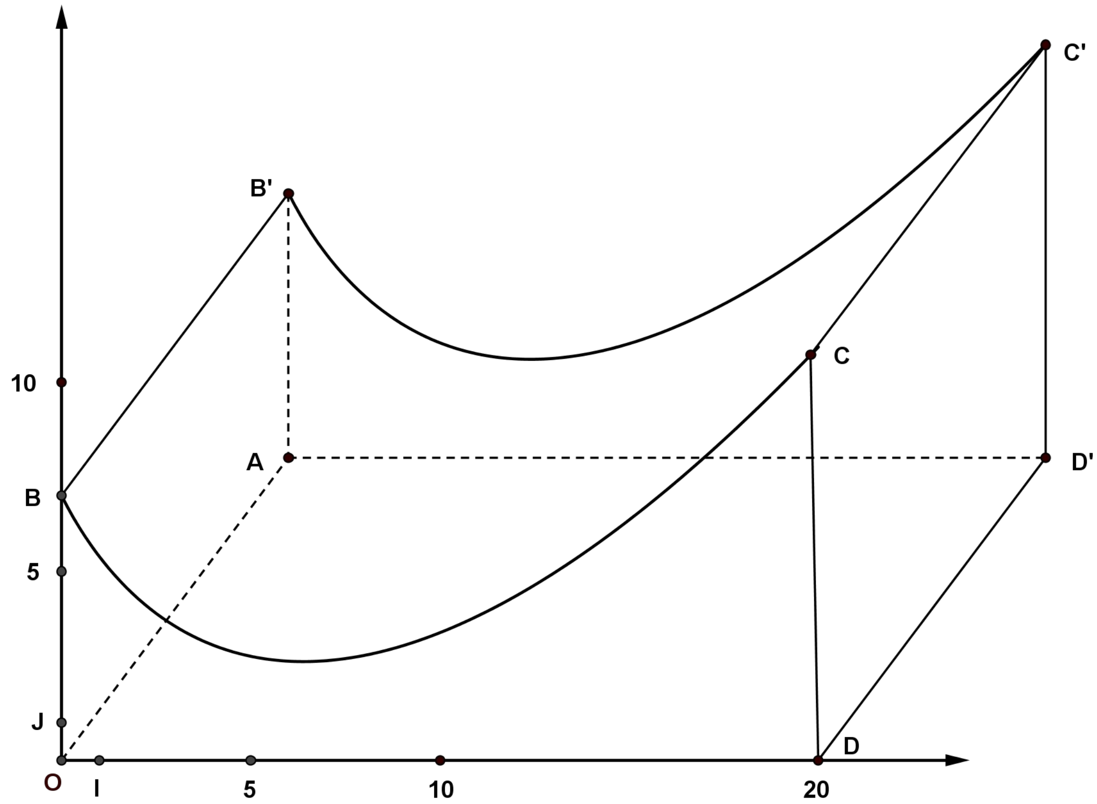
Exercice 4 — 6 points

Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune. Le dessin ci-dessous en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD'D, DD'C'C et OAB'B sont des rectangles.

Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$.

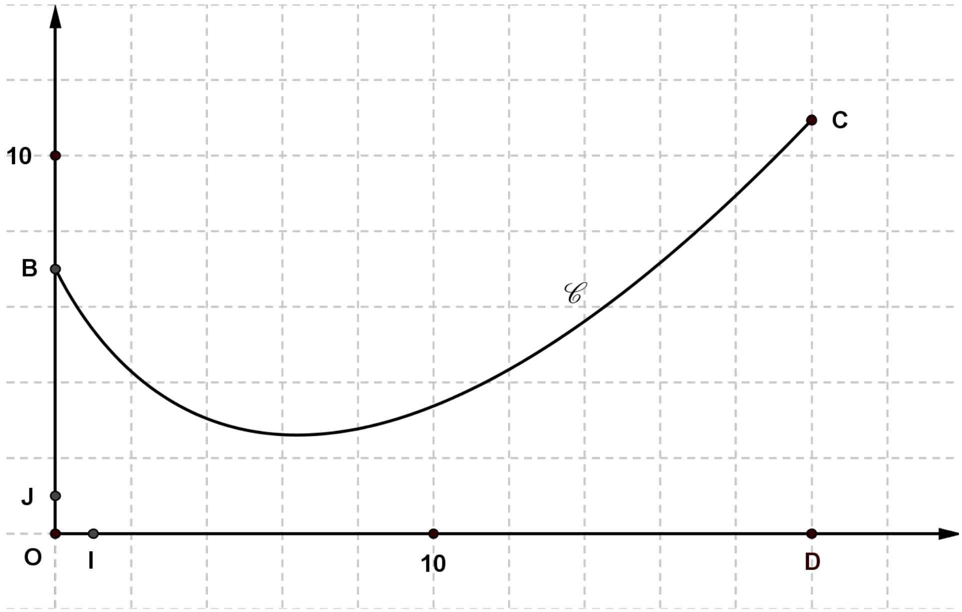
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit DD'=10, sa longueur OD est de 20 mètres.



Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;20]$, par : $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-3x+7$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O;I;J)$



Partie 1

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;20]$, on a : $f'(x)=\ln(x+1)-2$.

2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0;20]$ et dresser son tableau de variation.

3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0;20]$ par : $g(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$ a pour fonction dérivée g' définie sur l'intervalle $[0;20]$ par : $g'(x)=(x+1)\ln(x+1)$.
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;20]$.

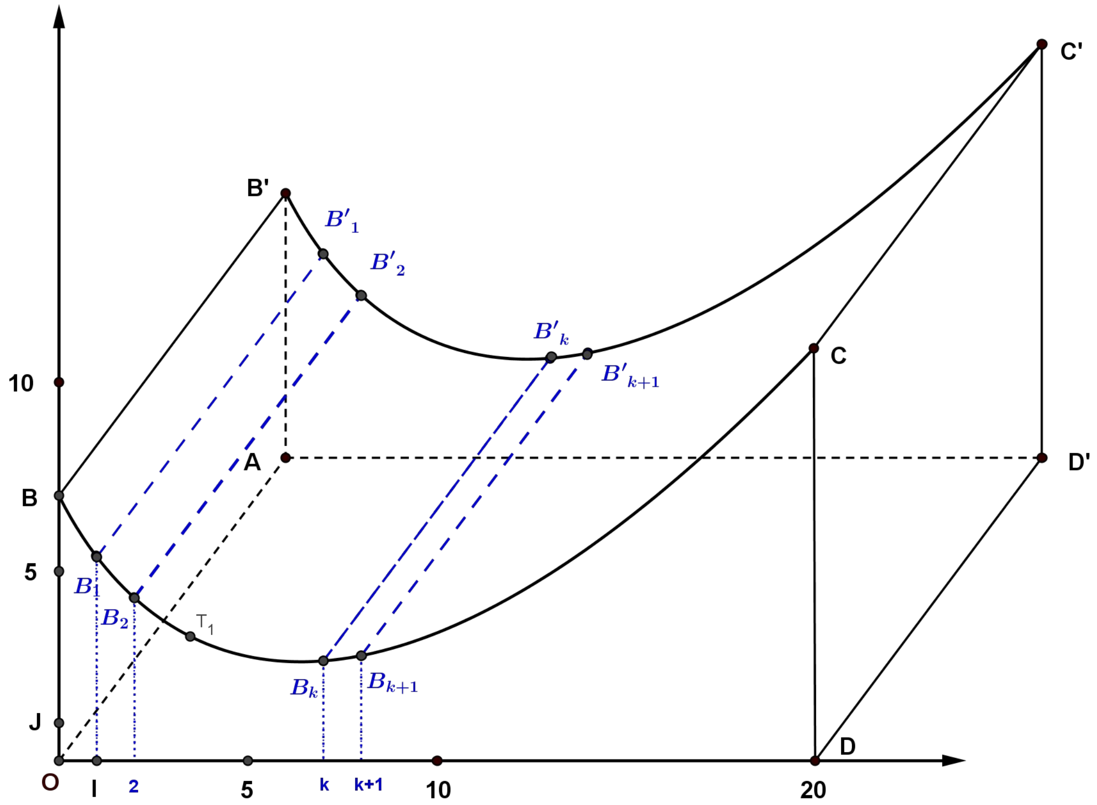
Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.
P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.
P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre face latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.
Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaire.

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module. Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère $(O;I;J)$ du plan de face, les points $B_k(k;f(k))$ pour k variant de 0 à 20. Ainsi $B_0=B$.



On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_k B_{k+1}]$. Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k$ (voir figure).

a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19, $B_k B_{k+1} = \sqrt{1+[f(k+1)-f(k)]^2}$.

b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables :	S : réel k : entier
Fonction :	f : définie par $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-3x+7$
Traitement :	S prend la valeur 0 Pour k variant de . . . à . . . . S prend pour valeur . . . . Fin Pour
Sortie :	Afficher . . .

Correction :
x appartient à l'intervalle $[0;20]$
$f(x)=(x+1)\ln(x+1)-3x+7$

Partie 1

1. f est dérivable sur $[0;20]$
$(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$ donc $(\ln(x+1))'=\frac{1}{x+1}$
et $f'(x)=1\times\ln(x+1)+(x+1)\times\frac{1}{x+1}-3=\ln(x+1)-2$

2. $\ln(x+1)-2=0\Leftrightarrow\ln(x+1)=2\Leftrightarrow x+1=e^2\Leftrightarrow x=e^2-1$
$\ln(x+1)-2>0\Leftrightarrow x>e^2-1$

x	0		e^2-1		20
f '(x)		-	0	+	
f(x)	7	↘	$f(e^2-1)$	↗	f(20)

$f(e^2-1)=e^2\times2-3(e^2-1)+7=10-e^2$ =2,61 à 10^{-2} près
e^2-1 =6,39 à 10^{-2} près
$f(20)=21\ln21-60+7$ =10,93 à 10^{-2} près

3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $f'(0)$
$\boxed{f'(0)=\ln(0+1)-2=-2}$
L'inclinaison du module au point B est 2.

4. On admet que g définie sur $[0;20]$ par $g(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$ est une primitive de l'application qui a x associe $(x+1)\ln(x+1)$ sur $[0;20]$.
Or $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-3x+7$.
Soit F définie sur $[0;20]$ par $F(x)=g(x)-\frac{3}{2}x^2+7x$
$F(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}x^2+7x=\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\frac{7}{4}x^2+\frac{13}{2}x$
F est une primitive de f sur $[0;20]$.

Partie 2

1. P_1 : VRAIE
Justification
Le point le plus bas : $f(e^2-1)=2,61$
Le point le plus haut : $f(20)=10,93$

La différence : $10{,}93-2{,}61=8{,}32$ >8

P_2 : VRAIE

Justification

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 20 est :

$f'(20)=\ln(21)-2=$ 1,04 à 10^{-2} près.

L'inclinaison du module au point C est 1,04 or l'inclinaison du module au point B est 2, donc l'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. Pour la face BODC, le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;I;J)$, unité de longueur le mètre.

On doit calculer, l'aire $\mathscr{A}_1$ en m^2, de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=20$.

$$\mathscr{A}_1=\int_0^{20} f(x)\,dx=F(20)-F(0)$$

$$\mathscr{A}_1=\frac{1}{2}\times 21^2\ln(21)-\frac{7}{4}\times 20^2+\frac{13}{2}\times 20=\frac{441}{2}\ln(21)-700+130=$$ 101,32m² à 10^{-2} près

La face B'AD'C' est identique à la face BODC sont aire $\mathscr{A}_2$ est donc égale à 101,32m²

La face BJAB' est un rectangle de base OA=10m et de hauteur OB=7m, son aire $\mathscr{A}_3$ est égale à $7\times 10=$70m².

La face CDD'C' est un rectangle de base DO'=10m et de hauteur CD=10,93m son aire $\mathscr{A}_4$ est égale à $10{,}93\times 10=$109,3m².

L'aire à peindre est :

$\mathscr{A}=\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2+\mathscr{A}_3+\mathscr{A}_4=2\times 101{,}32+109{,}3+70=$ 381,94m².

Il faut un litre de peinture pour $5\,m^2$.

$381{,}94:5=76{,}4$ à 10^{-2} près

Il faut donc 77 litres de peinture.

3.a. Dans le plan (BOD) rapporté au repère orthonormé $(O;I;J)$.

Pour tout entier k compris entre 0 et 19

$B_k(k;f(k))$ et $B_{k+1}(k+1;f(k+1))$

$B_kB_{k+1}^2=(k+1-k)^2+(f(k+1)-f(k))^2=1+(f(k+1)-f(k))^2$

et $\boxed{B_kB_{k+1}=\sqrt{(1+(f(k+1)-f(k))^2)}}$

b. L'aire de chacune des 20 planches, pour k entier compris entre 0 et 19 est :

$\boxed{10\times\sqrt{(1+(f(k+1)-f(k))^2)}}$

On complète l'algorithme :

Variables :	S : réel k : entier
Fonction :	f : définie par $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-3x+7$
Traitement :	S prend la valeur 0 Pour k variant de 0 à 19 S prend pour valeur $\boxed{S+10\times\sqrt{(1+(f(k+1)-f(k))^2)}}$ Fin Pour
Sortie :	Afficher S

remarque : On obtient 245,2m²