Exercice 2 4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=z^2+4z+3$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé. Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

2. Soit A le point d'affixe $\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$. Démontrer que OAB est un triangle équilatéral.

3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z=x+iy$ où x et y sont des nombres réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

Correction :

1. M(z) est **invariant** si et seulement si z'=z.

$z'=z \Leftrightarrow z=z^2+4z+3 \Leftrightarrow z^2+3z+3=0$

$\Delta=3^2-4\times1\times3=9-12=-3=(\mathrm{i}\sqrt{3})^2$

L'équation admet **deux solutions complexes conjuguées** :

$\boxed{z_1=\dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{z_2=\dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}$

Il existe **deux points invariants**, les points d'affixes z_1 et z_2 .

$|z_1|^2=\dfrac{|-3-\mathrm{i}\sqrt{3}|^2}{4}=\dfrac{9+3}{4}=3$

$z_1=\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

Soit θ_1 un argument de z_1

$\cos\theta_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_1=-\dfrac{1}{2}$

On obtient $\theta_1=\pi+\dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$

Soit $\theta_1=\dfrac{7\pi}{6}\ (2\pi)$

L'écriture **sous forme exponentielle** de z_1 est $z_1=\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$

z_2 est **le conjugué** de z_1

donc $|z_1|=|z_2|=\sqrt{3}$ et $\arg(z_2)=-\arg(z_1)(2\pi)$

$\arg(z_2)=-\dfrac{7\pi}{6}(2\pi)$

$\arg(z_2)=\dfrac{5\pi}{6}(2\pi)$

$\boxed{z_2=\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}}}$

Les **deux points invariants** sont $A(z_1)$ et $B(z_2)$.

2. OA=OB= $|z_1|=|z_2|=\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AB}\ (z_2-z_1)$

$\overrightarrow{AB}\ (\mathrm{i}\sqrt{3})$

AB= $|\mathrm{i}\sqrt{3}|=\sqrt{3}$

OA=OB=AB donc **le triangle OAB est équilatéral**.

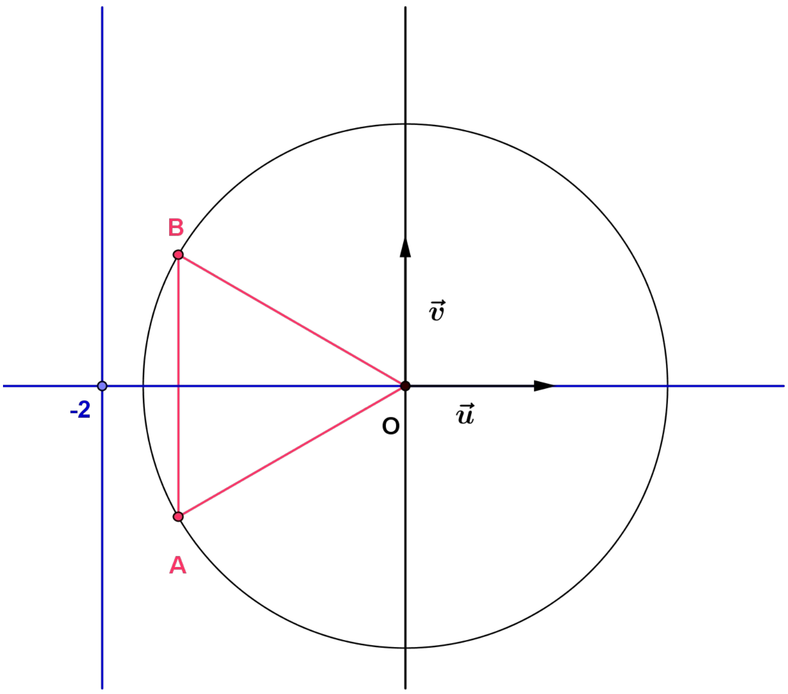
3. $z=x+\mathrm{i}y$ x et y sont des nombres réels.

$z'=z^2+4z+3=(x+\mathrm{i}y)^2+4(x+\mathrm{i}y)+3=x^2+2\mathrm{i}xy-y^2+4x+4\mathrm{i}y+3$

$\boxed{z'=x^2-y^2+4x+3+\mathrm{i}(2xy+4y)}$

M' est **sur l'axe des réels** si et seulement si z' est **un nombre réel** si et seulement si $\boxed{2xy+4y=0}$
Soit $2y(x+2)=0 \Leftrightarrow (y=0 \text{ ou } x=-2)$
C'est à dire M **appartient à l'axe des réels** ou M **appartient à la droite d'équation** : $x=-2$.
$\mathscr{E}$ est **la réunion de l'axe des réels et de la droite d'équation** : $\boxed{x=-2}$.

4.



$\mathscr{E}$ est **en bleu sur le dessin**.