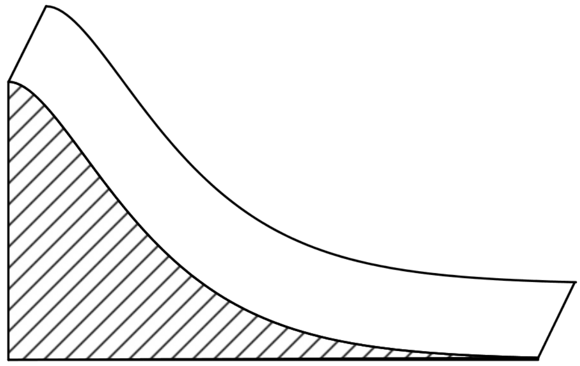
Exercice 4 — 5 points

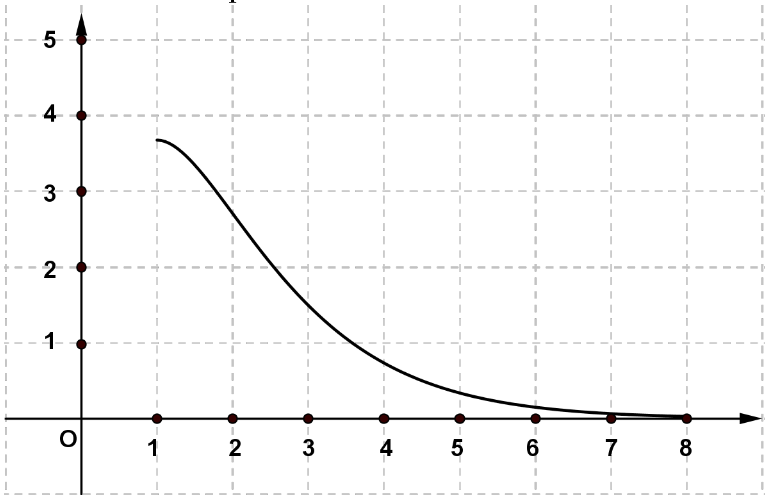
Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant en de ce toboggan perspective cavalière.
Voici le schéma :



Partie A : Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1;8]$ par : $f(x)=(ax+b)e^{-x}$ où a et b sont deux entiers naturels.

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale. Déterminer la valeur de b.

2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B : Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel x de l'intervalle $[1;8]$ par : $f(x)=10xe^{-x}$.
Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en

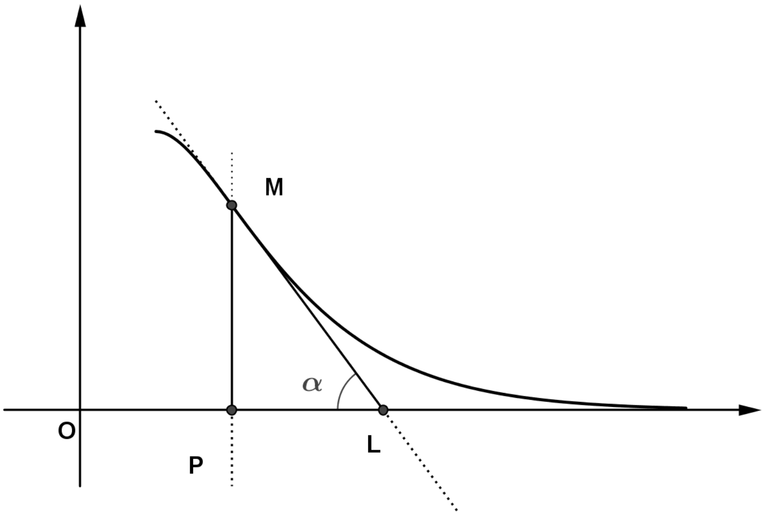
début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

1. Soit g la fonction définie sur $[1;8]$ par : $g(x)=10(-x-1)e^{-x}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.

2. Quel est le montant du devis de l'artiste ?

Partie C : Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan. On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différent de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses. La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1;8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1;8]$, $f'(x)=10(1-x)e^{-x}$.
Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1;8]$.

2. Soit x un réel de l'intervalle $]1;8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier que $\tan\alpha=|f'(x)|$

3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

Correction :

Partie A : modélisation

$f(x)=(ax+b)e^{-x}$. a et b sont deux entiers naturels.

1. f est **dérivable** sur $[1;8]$
$f'(x)=ae^{-x}-(ax+b)e^{-x}$
car $(e^{-x})'=-e^{-x}$
$f'(x)=(-ax+a-b)e^{-x}$
Le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe C au point d'abscisse 1 est : $\boxed{f'(1)}$.
$f'(1)=-be^{-1}=-\frac{b}{e}$
On souhaite que la tangente en ce point soit horizontale donc que $f'(1)=0$ soit **b=0**.
Conséquence
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;8]$: $\boxed{f(x)=axe^{-x}}$

2. On veut que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de hauteur soit $3{,}5\leqslant f(1)\leqslant 4$.

$f(1)=a\times 1\times e^{-1}=\frac{a}{e}$
$3{,}5\leqslant\frac{a}{e}\leqslant 4\Leftrightarrow 3{,}5\times e\leqslant a\leqslant 4\times e$
$3{,}5\times e=9{,}5$ à 10^{-1} près
$4\times e=10{,}9$ à 10^{-1} près
a est un entier naturel
donc **a=10**
Pour tout nombre réel de l'intervalle [1;8] : $\boxed{f(x)=10xe^{-x}}$.

Partie B : aménagement pour visiteurs

1. Pour tout x de l'intervalle $[1;8]$: $g(x)=10(-x-1)e^{-x}$
g est **dérivable** sur $[1;8]$
$g'(x)=-10e^{-x}-10(-x-1)e^{-x}=(-10+10x+10)e^{-x}=10xe^{-x}=f(x)$
donc g est **une primitive** de f sur $[1;8]$.

2. L'aire en m^2 du mur de soutènement est l'aire de la partie de plan comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=8$.

Cette aire est égale à $\int_1^8 f(x)\,dx$.

Or, $\int_1^8 f(x)\,dx=g(8)-g(1)=-90e^{-8}+20e^{-2}=$ **7,3274** à 10^{-4} prés

Pris payé à l'artiste :
$300+50\times7{,}3274=300+366{,}37=$**666,37€**

Partie C : une contrainte à vérifier

1. $f'(x)=10(1-x)e^{-x}$
f' est **dérivable** sur $[1;8]$
$f''(x)=-10e^{-x}-10(1-x)e^{-x}=(10x-20)e^{-x}$
Le signe de f'' est le signe de $10x-20$ sur $[1;8]$.
$10x-20=0\Leftrightarrow x=2$
$10x-20>0\Leftrightarrow x>0$
$f'(1)=0$ et $f'(8)=-70e^{-8}<0$
On obtient **le tableau de variation suivant** :

x	1		2		8
f''(x)		–	0	+	
f'(x)	0	↘	f'(2)	↗	f'(8)

$f'(2)=-e^{-2}$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;8]$: $f'(x)\leqslant0$

2. Dans le triangle MPL rectangle en P : $\tan\alpha=\dfrac{MP}{PL}$.

Le **coefficient directeur** de la droite (ML)
$$\frac{y_L-y_M}{x_L-x_M}=\frac{0-y_M}{x_L-x_p}=\frac{-y_M}{PL}=-\frac{MP}{PL}=-\tan\alpha$$
(car $x_M=x_P$)

Le coefficient directeur de la tangente en M à C est $f'(x_M)<0\quad(x_M\neq1)$
$\tan\alpha=-f'(x_M)=|f'(x_M)|$.
Le maximum de $\tan\alpha$ est égal à $|f'(2)|=|-10e^{-2}|=$**1,3534** à 10^{-4} près.
On obtient avec la calculatrice $\alpha=53{,}54^\circ<55°$.
Donc le toboggan est conforme aux contraintes imposées.