Exercice 5 — Candidats n'ayant pas suivi la spécialité — 5 points

Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = \ln(2)$ et pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = \ln\left(2 - e^{-v_n}\right)$. On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.
On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A : Conjecture à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur choisie par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur **. . .**
	S prend la valeur **. . .**
Traitement :	Pour k variant de **. . .** à **. . .** faire
	. . . prend la valeur **. . .**
	. . . prend la valeur **. . .**
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. A l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1000	10000	100000	1000000
S_n	2.4	4.6	6.9	9.2	11.5	13.8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = e^{v_n}$

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$

2. Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C : Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.

2. Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

Correction :

Partie A : Conjecture à l'aide d'un algorithme

1.

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur **ln(2)**
	S prend la valeur **ln(2)**
Traitement :	Pour k variant de **1** à **n-1** faire
	v prend la valeur **2-e^{-Vn}**
	S prend la valeur **s + v**
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. Conjecture : La suite (S_n) est **croissante**.

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = e^{v_n}$

1. $v_1 = \ln(2)$ $u_1 = e^{\ln(2)} = 2$
Pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{u_{n+1} = e^{\ln(2-e^{-v_n})} = 2 - e^{-v_n} = 2 - \frac{1}{e^{v_n}} = 2 - \frac{1}{u_n}}$$

2. $u_2 = 2 - \frac{1}{u_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$u_3 = 2 - \frac{1}{u_2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$

$u_4 = 2 - \frac{1}{u_3} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4}$

3. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :
$u_n = \frac{n+1}{n}$

Initialisation

Pour n=1 $u_1 = 2$ et $\frac{n+1}{n} = \frac{1+1}{1} = 2$

donc la propriété est vérifiée pour n=1.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que $u_n = \frac{n+1}{n}$ et on doit démontrer que $u_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

Or $u_{n+1}=2-\frac{1}{u_n}=2-\frac{n}{n+1}=\frac{2n+2-n}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$

Conclusion

Le **principe de récurrence** nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n : $u_n=\frac{n+1}{n}$.

Partie C : Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n=\frac{n+1}{n}$

$u_n=e^{v_n}\Leftrightarrow v_n=\ln(u_n)$

donc $\boxed{v_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln(n)}$

2. $S_3=u_1+u_2+u_3=\ln(2)+\ln(3)-\ln(2)+\ln(4)-\ln(3)=\ln(4)$

3. On peut vérifier que $S_4=\ln(5)$

Conjecture

Pour tout entier naturel n non nul : $S_n=\ln(n+1)$

On veut démontrer en utilisant **un raisonnement par récurrence** que, pour tout entier naturel non nul n,

$S_n=\sum_{k=1}^{n} v_k=v_1+v_2+\ldots+v_n=\ln(n+1)$

Initialisation

Pour n=1 $S_1=v_1=\ln(2)$ et $\ln(1+1)=\ln(2)$

donc la propriété est vérifiée pour n = 1

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel, non nul n, on suppose que $S_n=\ln(n+1)$ et on doit démontrer que $S_{n+1}=\ln(n+2)$.

Or, $S_{n+1}=S_n+v_{n+1}=\ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln(n+1)=\ln(n+2)$

Conclusion

Le **principe de récurrence** nous permet d'affirmer que pour tout entier non nul n : $S_n=\ln(n+1)$

$\lim_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.