Exercice 5 — Candidats ayant suivi la spécialité — 5 points

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}$

1. On appelle I La matrice identité d'ordre 2. Vérifier que $A^2=A+2I$.

2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha A+\beta I$ où α et β sont des nombres réels.

3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0=0$ et $s_0=1$ et, pour tout naturel n non nul, $\begin{cases} r_{n+1}=r_n+s_n \\ s_{n+1}=\quad 2r_n \end{cases}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n=r_nA+s_nI$.

4. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $k_n=r_n-s_n$ est géométrique de raison -1.
En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de k_n en fonction de n.

5. On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $t_n=r_n+\frac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2.
En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de t_n en fonction de n.

6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.

7. En déduire alors, pour tout entier naturel n non nul, une expression des coefficients de la matrice A^n .

Correction :

1. $A=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16-18 & -24+20\\ 12-15 & -18+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -3 & 7\end{pmatrix}$

$A+2I=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -3 & 7\end{pmatrix}$

donc, $\boxed{A^2=A+2I}$

2. $A^3=A^2\times A=(A+2I)\times A=A^2+2IA=A+2I+2A=3A+2I$

$\boxed{A^3=3A+2I}$

$A^4=A^3\times A=(3A+2I)\times A=3A^2+2AI=3(A+2I)+2A=5A+6I$

$\boxed{A^4=5A+6I}$

3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par : $r_0=0$ et $s_0=1$ et pour tout entier naturel n, $\begin{cases} r_{n+1}=r_n+s_n \\ s_{n+1}=\ \ 2r_n \end{cases}$.

On veut démontrer en utilisant **un raisonnement par récurrence** que pour tout entier naturel n: $A^n=r_nA+s_nI$.

Initialisation

On convient que : $A^0=I$ et $r_0A+s_0I=0\times A+1\times I=I$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $A^n=r_nA+s_nI$ et on doit démontrer que $A^{n+1}=r_{n+1}A+s_{n+1}I$

or, $A^{n+1}=A^n\times A=(r_nA+s_nI)\times A=r_nA^2+s_nAI=r_n(A+2I)+s_nA=(r_n+s_n)A+2r_nI$

Donc, $A^{n+1}=r_{n+1}A+s_{n+1}I$

Conclusion

Le **principe de récurrence** nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $\boxed{A^n=r_nA+s_nI}$

4. (k_n) est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $k_n=r_n-s_n$;

Pour tout entier naturel non nul n :

$k_{n+1}=r_{n+1}-s_{n+1}=r_n+s_n-2r_n=-r_n+s_n=-(r_n-s_n)=-k_n$

donc la suite (k_n) est **la suite géométrique** de **raison** $q=-1$ et de **premier terme** $k_1=r_1-s_1=1-0=1$

car $r_1=r_0+s_0=0+1=1$ et $s_1=2\times r_0=2\times 0=0$ ou $A^1=1\times A+0\times I$

et $\boxed{k_n=k_1\times q^{n-1}=1\times(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}}$

5. (t_n) est la suite définie pour tout entier naturel n,non nul par : $t_n=r_n+\frac{(-1)^n}{3}$

On admet que (t_n) est **une suite géométrique de raison 2**.

Justification non demandée

Pour tout entier naturel n, non nul, $t_{n+1}=r_{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{3}=r_n+s_n+\frac{(-1)^{n+1}}{3}$

Or, $k_n=r_n-s_n=(-1)^{n-1}$ donc $s_n=r_n-(-1)^{n-1}$

$t_{n+1}=r_n+r_n-(-1)^{n-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{3}$

On a : $-(-1)^{n-1}=(-1)^n$ et $\frac{(-1)^{n+1}}{3}=-\frac{(-1)^n}{3}$

donc, $t_{n+1}=2r_n+\frac{3(-1)^n-(-1)^n}{3}=2r_n+\frac{2(-1)^n}{3}=2\left(r_n+\frac{(-1)^n}{3}\right)=2t_n$

(t_n) est **la suite géométrique** de **raison** $q=2$ et de **premier terme** $t_1=r_1+\frac{(-1)^1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Conséquence

Pour tout entier naturel non nul n : $\boxed{t_n=t_1\times q^{n-1}=\frac{2}{3}\times 2^{n-1}=\frac{2^n}{3}}$

6. Pour tout entier naturel n non nul :

$\boxed{r_n=t_n-\frac{(-1)^n}{3}=\frac{2^n}{3}-\frac{(-1)^n}{3}}$

$s_n=r_n+(-1)^n=\frac{2^n}{3}-\frac{(-1)^n}{3}+(-1)^n$

$\boxed{s_n=\frac{2^n}{3}+\frac{2(-1)^n}{3}}$

7. $A^n=z_n A+s_n I$ avec $A=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$-4r_n+s_n=-\frac{4}{3}\times 2^n+\frac{2^n}{3}+\frac{4(-1)^n}{3}+\frac{2(-1)^n}{3}=-\frac{3\times 2^n}{3}+\frac{6(-1)^n}{3}=2^n+2\times(-1)^n$

$6r_n=2\times 2^n-2\times(-1)^n$

$-3r_n=-2^n+(-1)^n$

$5r_n+s_n=\frac{5}{3}\times 2^n-\frac{5\times(-1)^n}{3}+\frac{2^n}{3}+\frac{2(-1)^n}{3}=2\times 2^n-(-1)^n$

$$\boxed{A^n=\begin{pmatrix}2^n+2\times(-1)^n & 2\times 2^n-2\times(-1)^n\\ -2^n+(-1)^n & 2\times 2^n-(-1)^n\end{pmatrix}}$$

