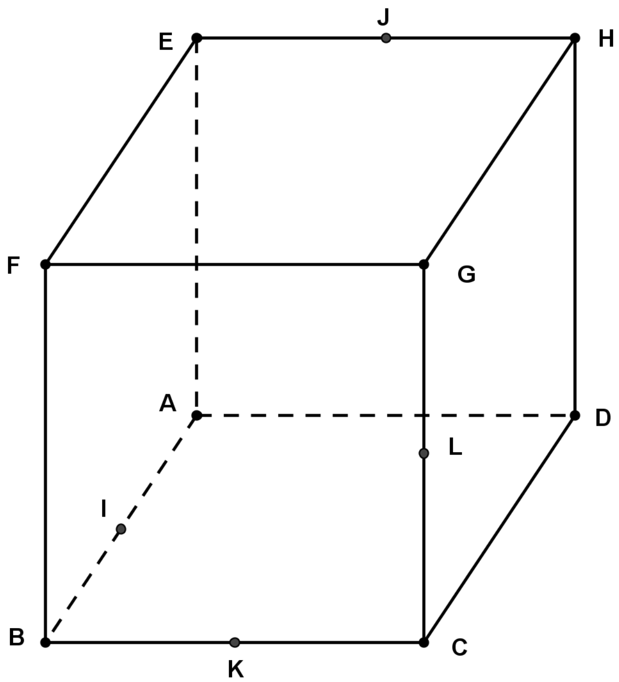
Exercice 1 — 6 points

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment $[AB]$, J est le milieu du segment $[EH]$, K est le milieu du segment $[BC]$ et L est le milieu du segment $[CG]$.
On munit l'espace du repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE})$.

1.a. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK).
Déterminer les coordonnées du point M.

4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

5. Calculer le volume du tétraèdre FIJK.

6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Correction :

$(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.

On détermine les coordonnées de tous les points donnés de la figure.

$A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $C(1;1;0)$ $D(0;1;0)$ $E(0;0;1)$ $F(1;0,1)$

$G(1;1;1)$ $H(0;1;1)$ $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ $J\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ $K\left(1;\frac{1}{2};0\right)$ $L\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$

1.a. La droite (FD) est **orthogonale au plan** (IJK) si et seulement si (FD) est **orthogonale à deux droites sécantes** du plan (IJK).

$\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ}=(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times\frac{1}{2}+(-1)\times1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$

donc les droites **(FD) et (IJ) sont orthogonales**.

$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IK}=(-1)\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}+(-1)\times0=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$

donc les droites **(FD) et (IK) sont orthogonales**.

(IJ) et (IK) sont deux droites sécantes contenues dans le plan (IJK).

Conclusion :

(FD) est **une droite orthogonale au plan (IJK)**.

b. $M(x;y;z)$ **appartient au plan** (IJK) si et seulement si $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{FD}=\mathbf{0}$.

$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-\frac{1}{2}\\y\\z\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{FD}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\times(-1)+y\times1+z\times(-1)=0 \Leftrightarrow -x+y-z+\frac{1}{2}=0$

Une équation cartésienne du plan (IJK) est : $\boxed{-x+y-z+\frac{1}{2}=0}$.

2. $F(1;0;1)$ $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

donc $\begin{cases}x=-t+1\\y=t+0\\z=-t+1\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ est une **représentation paramétrique** de (FD).

3. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection M de (FD) et (IJK), on résout le système :

$$\begin{cases}-x+y-z+\frac{1}{2}=0\\x=-t+1\\y=t+0\\z=-t+1\end{cases}$$

On obtient : $-(-t+1)+(t+0)-(-t+1)+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow 3t-\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

et $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\boxed{\mathrm{M}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$

M est **le centre du cube**, M est **le milieu** de $[\mathrm{FK}]$, M est **le milieu** de $[\mathrm{FD}]$ et M est **le milieu** de $[\mathrm{BH}]$.

4. L'unité de longueur d'un côté du cube.

$\vec{\mathrm{IJ}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{IJ}^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}$

$\vec{\mathrm{IK}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{IK}^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$\vec{\mathrm{JK}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{JK}^2=1+1=2$

On obtient $\boxed{\mathrm{IJ}^2+\mathrm{IK}^2=\mathrm{JK}^2=2}$

La **réciproque du théorème de Pythagore** nous permet d'affirmer que le triangle IJK est **rectangle en I**.

Remarque :

On peut aussi démontrer que $\vec{\mathrm{IJ}}\,.\,\vec{\mathrm{IK}}$ **=0.**

L'unité d'aire est l'aire d'une face du cube.

$\mathrm{IJ}=\sqrt{\frac{6}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\mathrm{IK}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathscr{A}$ est l'aire du triangle IJK

$\mathscr{A}=\frac{1}{2}\times\mathrm{IJ}\times\mathrm{IK}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\mathscr{A}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

5. L'unité de volume est le volume du cube ABCDEFGH.

Le volume d'un tétraèdre est égal à $\mathrm{V}=\frac{1}{3}\times\mathrm{B}\times\mathrm{h}$

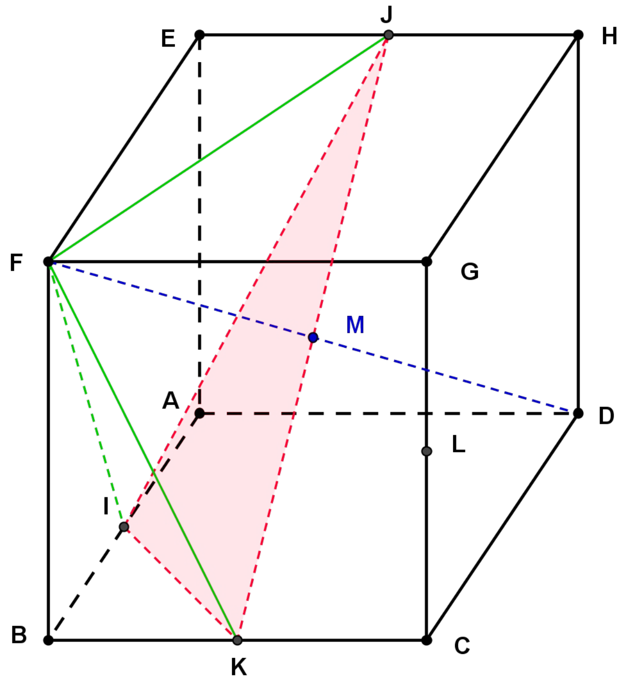
B est l'aire de la base ici $\mathrm{B}=\mathscr{A}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

h est la hauteur ici $\mathrm{h}=\mathrm{FM}$.

$\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $FM^2=\frac{3}{4}$ $FM=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{3\times 8}=\frac{1}{8}}$$

On joint une figure complétée.



6. On peut répondre à la question en déterminant une représentation paramétrique de chaque droite et en déterminant par le calcul l'intersection.
On peut utiliser aussi le résultat suivant : **deux droites de l'espace sont sécantes si et seulement si elles sont coplanaires et non parallèles**.
Or, les droites (IL) et (JK) sont coplanaires si et seulement si L appartient au plan (IJK).

$(IJK): -x+y-z+\frac{1}{2}=0$ $L\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$

$-1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$

donc les droites (IL) et (KL)sont **coplanaires**.

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les deux droites (IJ) et (KL) **ne sont pas parallèles**.
Conclusion
Les droites (IJ) et (KL) sont **sécantes**.