Exercice 2 — 6 points

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

pour tout entier naturel n, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$.

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx$.

2.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$

b. En déduire la valeur exacte de u_1 .

3.a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sottie le terme du rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables : i et n sont des entiers naturels
u est un réel
Entrée : Saisir n
Initialisation : Affecter à u la valeur . . .
Traitement : Pour i variant de 1 à . . .
Affecter à u la valeur . . .
Fin Pour
Sortie : Afficher u

b. A l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0.6931	03069	0.1931	0.1402	0.1098	0.0902	0.0475	0.0099	0.0050

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4.a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5. On appelle l la limite de la suite (u_n) . Démontrer que $l = 0$.

Correction :

1. $u_0=\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$

x appartient à l'intervalle $[0;1]$

$\mathrm{u}(x)=1+x \qquad \mathrm{u}'(x)=1$

$\mathrm{f}_0(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{\mathrm{u}'(x)}{\mathrm{u}(x)}$

$\mathrm{F}_0(x)=\ln(1+x)$

F_0 est **une primitive** de f_0 sur $[0;1]$

$\mathrm{u}_0=\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{F}_0(1)-\mathrm{F}_0(0)=\ln(1+1)-\ln 1$

$\boxed{\mathrm{u}_0=\ln 2}$

2.a . Pour tout entier naturel n

$\mathrm{u}_n+\mathrm{u}_{n+1}=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{x^n}{1+x}+\frac{x^{n+1}}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{u}_n+\mathrm{u}_{n+1}=\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$

x appartient à l'intervalle $[0;1]$

$\mathrm{g}_n(x)=x^n \qquad \mathrm{G}_n(x)=\frac{x^{n+1}}{\mathrm{n}+1}$

G_n est **une primitive** de g_n sur $[0;1]$

$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\mathrm{G}_n(1)-\mathrm{G}_n(0)=\frac{1}{\mathrm{n}+1}$

donc, $\boxed{\mathrm{u}_n+\mathrm{u}_{n+1}=\frac{1}{\mathrm{n}+1}}$

b. $\mathrm{u}_0+\mathrm{u}_1=\frac{1}{0+1}=1$

$\boxed{\mathrm{u}_1=1-\mathrm{u}_0=1-\ln 2}$

3.a.

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur u_0 = **ln2**
Traitement :	Pour i variant de 1 à **n**
	Affecter à u la valeur $\boxed{\frac{1}{\mathrm{i}}-\mathrm{u}}$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

b. Conjectures :

La suite (u_n) est **décroissante** et **converge vers 0**

4.a. Pour tout entier naturel n

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx-\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=\int_0^1\left(\frac{x^{n+1}}{1+x}-\frac{x^n}{1+x}\right)dx=-\int_0^1\left(\frac{x^n-x^{n+1}}{1+x}\right)dx$$

$$u_{n+1}-u_n=-\int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{1+x}dx$$

Pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$

$$h(x)=\frac{x^n(1-x)}{1+x}\geqslant 0$$

donc $\int_0^1 h(x)dx\geqslant 0$ (Positivité de l'intégrale)

<u>Conséquence</u>

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$ et la suite (u_n) est **<u>décroissante</u>**.

b. $u_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

Pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1]$

$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x}\geqslant 0$ donc $u_n=\int_0^1 f_n(x)dx\geqslant 0$.

La suite (u_n) est **<u>décroissante</u>** et **<u>minorée par 0</u>** donc la suite (u_n) est **<u>convergente</u>**.

5. $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$

Pour tout entier naturel n

$$u_{n+1}+u_n=\frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=l$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$

$l+l=0$

<u>Conclusion</u>

<u>$l=0$</u>