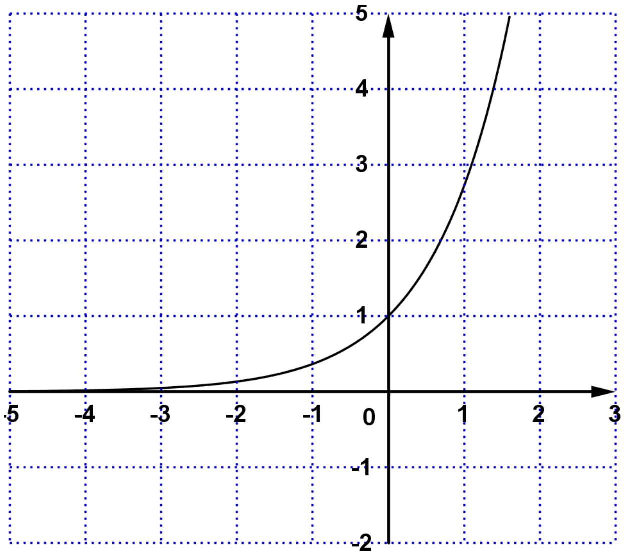
Exercice 3 — 3 points

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^{x}$, tracée ci-dessous



Pour tout réel m strictement positif, on $\mathscr{D}_{\mathrm{m}}$ la droite d'équation $y = \mathrm{m}\,x$.

1. Dans cette question, on choisit $\mathrm{m} = \mathrm{e}$.
Démontrer que la droite $\mathscr{D}_{\mathrm{e}}$ d'équation $y = \mathrm{e}\,x$, et tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le rérl strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_{\mathrm{m}}$.

3. Démontrer cette conjecture.

Correction :

1. m=e $\mathscr{D}_{\mathrm{m}}$: $y=\mathrm{e}\,x$

Le point d'abscisse 1, de la courbe $\mathscr{C}$, a pour ordonnée e.

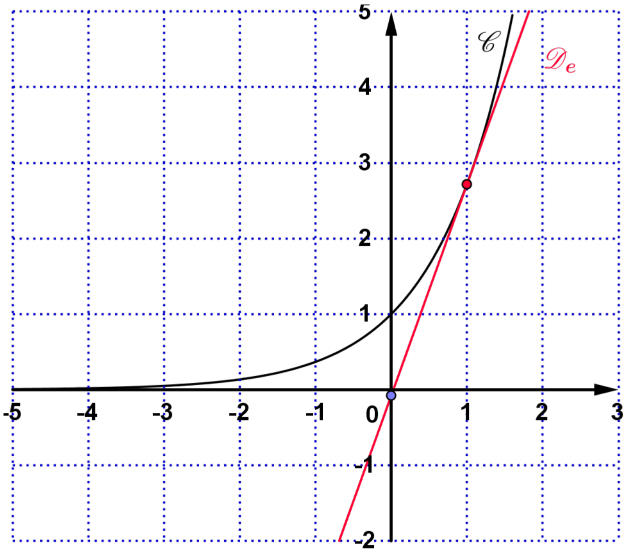
$(\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x}$

Le **coefficient directeur de la tangente** au point d'abscisse 1 de la courbe $\mathscr{C}$ **est le nombre dérivé** : $\mathrm{e}^{1}=\mathrm{e}$.

On obtient pour **équation de la tangente** :

$y-\mathrm{e}=\mathrm{e}(x-1)$ soit $y=\mathrm{e}\,x$

donc $\mathscr{D}_{\mathrm{e}}$ est **la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1**.



2. m est un nombre réel strictement positif.

Si m<e alors $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_{\mathrm{m}}$ **n'ont pas de point d'intersection**.

Si m>e alors $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_{\mathrm{m}}$ **ont deux points d'intersection**.

3. Le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_{\mathrm{m}}$ est le nombre de solution de l'équation : $\mathrm{e}^{x}-\mathrm{m}\,x=0$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{m}\,x$

g est **dérivable** sur $\mathbb{R}$

$g'(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{m}$

$\mathrm{e}^{x}-\mathrm{m}=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}=\mathrm{m} \Leftrightarrow x=\ln(\mathrm{m})$

$\mathrm{e}^{x}-\mathrm{m}>0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}>\mathrm{m} \Leftrightarrow x>\ln(\mathrm{m})$

$\mathrm{e}^{x}-\mathrm{m}<0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}<\mathrm{m} \Leftrightarrow x<\ln(\mathrm{m})$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{m}\,x=+\infty$

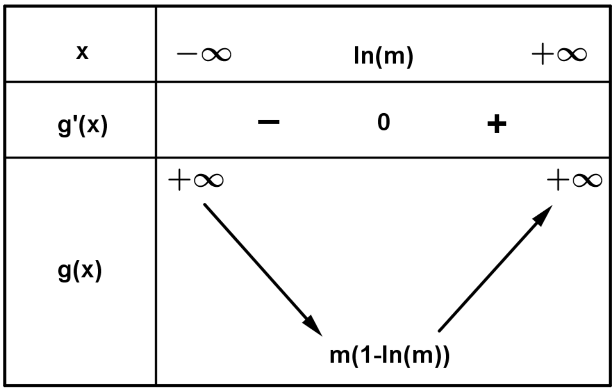
donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\boxed{+\infty}$

Si $x>0$ alors $g(x)=x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}-\mathrm{m}\right)$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$g(\ln(\mathrm{m}))=\mathrm{m}-\mathrm{m}\ln(\mathrm{m})=\mathrm{m}(1-\ln(\mathrm{m}))$

<u>Tableau de variation de g</u>

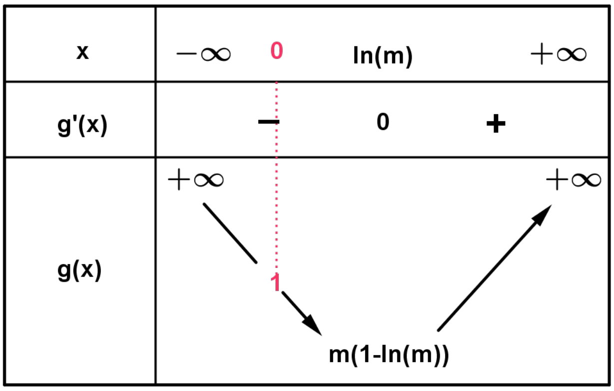


$m(1-\ln(m))=0 \Leftrightarrow \ln(m)=1 \Leftrightarrow m=e$
$m(1-\ln(m))>0 \Leftrightarrow 1-\ln(m)>0 \Leftrightarrow 1>\ln(m) \Leftrightarrow e>m$
$m(1-\ln(m))<0 \Leftrightarrow 1-\ln(m)<0 \Leftrightarrow 1<\ln(m) \Leftrightarrow e<m$

Premier cas : m=e et lne=1
alors $\mathscr{D}_e$ et $\mathscr{C}$ ont **un seul point d'intersection**
$\mathscr{D}_e$ est **tangente** à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(0;1)$.

Deuxième cas : m<e alors $m(1-\ln(m))>0$
donc g admet **un minimum strictement positif** et l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_m$ n'**ont aucun point d'intersection**.

Troisième cas : m>e alors m(1–ln(m))<0
On a ln(m)>1>0



Le **théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule appartenant à l'intervalle $]\ln(m);+\infty[$ et une solution et une seule appartenant à $]-\infty;\ln(m)[$.
En remarquant que $g(0)=1$, on peut affirmer que la deuxième solution appartient à $]0;\ln(m)[$.
<u>Conclusion</u>
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_m$ ont **deux points d'intersection**.