Exercice 4 **Candidats n'ayant pas suivi la spécialité** 5 points

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B. Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :
. A l'événement « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
. B l'événement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
. V l'événement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2.a. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.

4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A. *estimation après redressement,fondée sur un échantillon représentatif de 1200 personnes.

Au seuil de confiance de 95 % le candidat A peut-il croire en sa victoire ?

5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4. L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1200 réponses. Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

Correction :

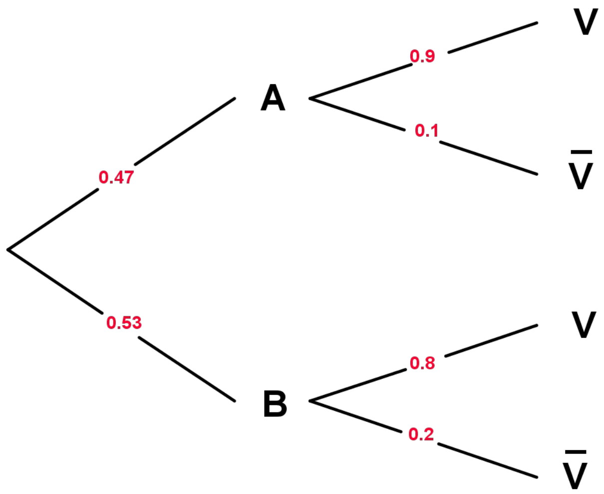
1. L'énoncé précise :

47 % des personnes, qui ont répondu, affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.
On obtient : $\boxed{P(A)=0{,}47}$ et $\boxed{P(B)=1-0{,}47=0{,}53}$.

10 % des personnes déclarant voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent pour B.
On obtient : $\boxed{P_A(\bar{V})=0{,}1}$ et $\boxed{P_A(V)=1-0{,}1=0{,}9}$.

20 % des personnes déclarant voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent pour A.
On obtient : $\boxed{P_B(\bar{V})=0{,}2}$ et $\boxed{P_B(V)=1-0{,}2=0{,}8}$.

On construit l'arbre pondéré



2.a. En utilisant le théorème des probabilité totales ou l'arbre pondéré, on obtient :
$P(V)=P(A\cap V)+P(B\cap V)=P(A)\times P_A(V)+P(B)\times P_B(V)$
$P(V)=0{,}47\times 0{,}9+0{,}53\times 0{,}8=0{,}423+0{,}424=0{,}847$
$P(V)$ = 0,847

b. On nous demande $P_V(A)$
Or, $P_V(A)=\dfrac{P(A\cap V)}{P(V)}=\dfrac{0{,}423}{0{,}847}$ = 0,499 à 10^{-3} près

3. La probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est :
$P(A)\times P_A(V)+P(B)\times P_B(\bar{V})=0{,}47\times 0{,}9+0{,}53\times 0{,}2=0{,}423+0{,}106$ = 0,529

4. La proportion obtenue par le sondage dans l'échantillon de 1200 personnes est $f=0{,}529$.
Sachant que : $n=1200\geqslant 30$; $np=1200\times 0{,}529=634{,}8\geq 5$ et $(1-p)n=1200\times 0{,}529=565{,}2\geq 5$.
On peut considérer l'intervalle de confiance au seuil de 95 % :
$$I=\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0{,}529-\frac{1}{\sqrt{1200}};0529+\frac{1}{\sqrt{1200}}\right]=[0{,}5001;0{,}5579]$$
En pourcentage : entre 50,01 % et 55,79 %.
Donc, le candidat peut croire en sa victoire au seuil de 95 %.

5. On interroge une personne au hasard et on considère l'épreuve de Bernoulli :
Succès S : la personne interrogée accepte de répondre et P(S)=**0,4**.
Échec $\overline{S}$: la personne interrogée n'accepte pas de répondre et $P(\overline{S})$ =**0,6**.

Étant donné le grand nombre de personnes pouvant être interrogées, on peut considérer les tirages effectués avec remise. La loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre de succès en 10 épreuves est **la loi binomiale de paramètres 10 et 0,4** son espérance mathématique est : $np=10\times 0{,}4$ = **4**.
Pour une **demi-heure**, il y aura **4 personnes**, en moyenne, qui accepteront de répondre.
Pour obtenir **1200 personnes il faudra 300 demi-heures soit 150 heures**.