Exercice 4 **Candidats ayant suivi la spécialité** 5 points

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :
. S'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9.
. S'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.
On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le $n^{\text{ième}}$ jour après la décision d'arrêter de fumer et q_n la probabilité de fumer le $n^{\text{ième}}$ jour après la décision d'arrêter de fumer.
On suppose que $p_0=0$ et $q_0=1$.

1. Calculer p_1 et q_1 .

2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n) . Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous.

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
6	3			

Dans la colonne A figure les valeurs de l'entier naturel n.
Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) et (q_n) ?

3. On définit les matrices M et, pour tout entier naturel n, X_n par $M=\begin{pmatrix}0,9 & 0,4\\0,1 & 0,6\end{pmatrix}$ et $X_n=\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$.

On admet que $X_{n+1}=M\times X_n$ et que, pour tout entier naturel n, $X_n=M^n\times X_0$.

On définit les matrices A et B par $A=\begin{pmatrix}0,8 & 0,8\\0,2 & 0,2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0,2 & -0,8\\-0,2 & 0,8\end{pmatrix}$

a. Démontrer que $M=A+0,5\,B$

b. Vérifier que $A^2=A$, et que $A\times B=B\times A=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif $A^n=A$ et $B^n=B$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $M^n=A+0,5^n B$.

d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_n=0,8-0,8\times 0,5^n$

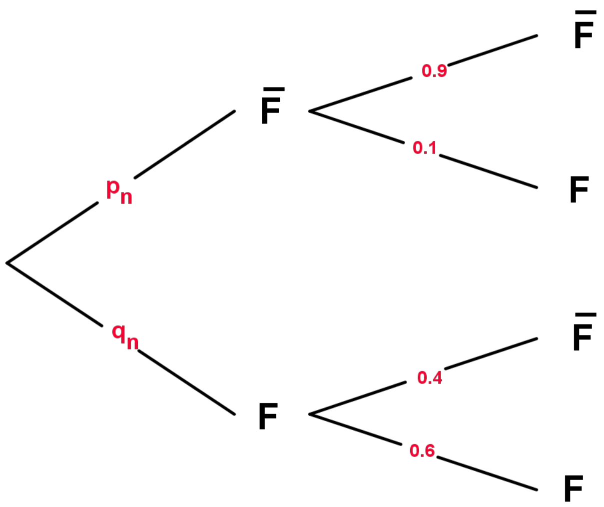
e. A long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?

Correction :

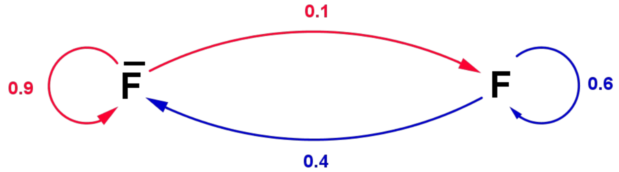
1. $p_0=0$ et $q_0=1$
Pour le premier jour, on sait que la personne a fumé la veille (car $q_0=1$) donc $\boxed{p_1=0{,}4}$ et $\boxed{q_1=0{,}6}$, car si la personne fume un jour, la probabilité qu'il fume le jour suivant est 0,6 donc la probabilité pour qu'il ne fume pas est : $\boxed{1-0{,}6=0{,}4}$.

2. On note :
F l'événement : « la personne fume le jour donné »
$\overline{F}$ l'événement : « la personne ne fume pas le jour donné »
Pour le $n^{ième}$ jour $\boxed{P(\overline{F})=p_n}$ et $\boxed{P(F)=q_n}$
L'énoncé précise :
Si la personne a fumé le $n^{ième}$ jour, la probabilité qu'il fume le jour suivant est 0,6 et la probabilité pour qu'il ne fume pas est 1-0,6=0,4
Si la personne n'a pas fumé le $n^{ième}$ jour, la probabilité pour qu'il ne fume pas le jour suivant est : 0,9 et la probabilité qu'il fume le jour suivant est 1-0,9=0,1.

On peut construire **une partie d'un arbre pondéré**.



On peut aussi construire un graphe probabiliste.



On obtient :
$\boxed{p_{n+1}=0{,}9\,p_n+0{,}4\,q_n}$
$\boxed{q_{n+1}=0{,}1\,p_n+0{,}6\,q_n}$
En B3, on écrit : $=0{,}9\times B2+0{,}4\times C2$
En C3, on écrit : $=0{,}1\times B2+0{,}6\times C2$

3. $M=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}6\end{pmatrix}$ $X_n=\begin{pmatrix}p_n\\ q_n\end{pmatrix}$ $X_{n+1}=\begin{pmatrix}p_{n+1}\\ q_{n+1}\end{pmatrix}$

On vérifie facilement que $\boxed{X_{n+1}=MX_n}$

$$MX_n=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_n\\ q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}9\,p_n+0{,}4\,q_n\\ 0{,}1\,p_n+0{,}6\,q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{n+1}\\ q_{n+1}\end{pmatrix}=X_{n+1}$$

(La justification n'est pas demandée)

On admet que $X_n=M^nX_0$

(on peut démontrer facilement ce résultat en effectuant un raisonnement par récurrence).

$A=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}8\\ 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0{,}2 & -0{,}8\\ -0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$

a.

$$A+0{,}5B=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}8\\ 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}+0{,}5\begin{pmatrix}0{,}2 & -0{,}8\\ -0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}8\\ 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}1 & -0{,}4\\ -0{,}1 & 0{,}4\end{pmatrix}$$

$$A+0{,}5B=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}6\end{pmatrix}=\underline{M}$$

Donc, $\boxed{M=A+0{,}5B}$

b.

$$A^2=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}8\\ 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}8\\ 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8\times0{,}8+0{,}8\times0{,}2 & 0{,}8\times0{,}8+0{,}8\times0{,}2\\ 0{,}2\times0{,}8+0{,}2\times0{,}2 & 0{,}2\times0{,}8+0{,}2\times0{,}2\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0{,}64+0{,}16 & 0{,}64+0{,}16\\ 0{,}16+0{,}04 & 0{,}16+0{,}04\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}8\\ 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}=\underline{A}$$

donc $\boxed{A^2=A}$ (On peut utiliser la calculatrice)

$$A\times B=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}8\\ 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}2 & -0{,}8\\ -0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8\times0{,}2-0{,}8\times0{,}2 & -0{,}8\times0{,}8+0{,}8\times0{,}8\\ 0{,}2\times0{,}2-0{,}2\times0{,}2 & -0{,}2\times0{,}8+0{,}2\times0{,}8\end{pmatrix}$$

$\boxed{A\times B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$ (On peut utiliser la calculatrice)

$$B\times A=\begin{pmatrix}0{,}2 & -0{,}8\\ -0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}8\\ 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}2\times0{,}8-0{,}8\times0{,}2 & 0{,}2\times0{,}8-0{,}8\times0{,}2\\ 0{,}2\times0{,}8-0{,}8\times0{,}2 & -0{,}2\times0{,}8+0{,}8\times0{,}2\end{pmatrix}$$

$B\times A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ (On peut utiliser la calculatrice)

On admet que pour tout entier naturel strictement positif : $A^n=A$ et $B^n=B$.

c. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n $M^n=A+0{,}5^nB$.

__Initialisation__

cas particulier : $n=0$

On suppose que $M^0=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et que $0{,}5^0=1$

On vérifie que $\boxed{A+0{,}5^0B=A+B=I}$

Pour $n=1$, on a démontré que $M=A+0{,}5B$ donc $M^1=A+0{,}5^1B$

La propriété est vérifiée pour $n=1$

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel *n*, on suppose que $M^n = A + 0,5\,B$ et on doit démontrer que $M^{n+1} = A + 0,5^{n+1}B$.

$M^{n+1} = M^n \times M^1 = (A + 0,5^n B) \times (A + 0,5\,B)$

En utilisant les propriétés du calcul matriciel, on obtient :

$M^{n+1} = A \times A + (0,5^n B) \times A + A \times (A + 0,5\,B) + (0,5^n) \times (0,5\,B)$

$M^{n+1} = A^2 + 0,5^n (B \times A) + 0,5(A \times B) + (0,5^n \times 0,5)B^2$

Or, $A^2 = A$; $B^2 = B$; $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc, $M^{n+1} = A + 0,5^{n+1}B$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel *n*, $M^n = A + 0,5^n B$

d. Pour tout entier naturel *n*, nous avons :

$X_n = M^n X_0$ $\quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ $\quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\quad M^n = A + 0,5^n B$

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + 0,5^n \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 + 0,5^n \times 2 & 0,8 - 0,5^n \times 0,8 \\ 0,2 - 0,5^n \times 0,2 & 0,2 + 0,5^n \times 0,8 \end{pmatrix}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 + 0,5^n \times 0,2 & 0,8 - 0,5^n \times 0,8 \\ 0,2 - 0,5^n \times 0,2 & 0,2 + 0,5^n \times 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 - 0,5^n \times 0,8 \\ 0,2 + 0,5^n \times 0,8 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n}$

e. $0 \leqslant 0,5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \mathbf{0,8}$

A long la terme, **la probabilité de 0,8 d'arrêter de fumer**.

Conséquence

A long terme, on ne peut pas affirmer avec certitude que la personne arrêtera de fumer.