Exercice 1 — 5 points

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un nombre réel strictement positif. On note Δ_a la droite d'équation $y=ax$ et Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection de Γ et Δ_a suivant les valeurs de a.
Pour cela, on considère la fonction f_a définie pour tout nombre réel x par $f_a(x)=e^x-ax$
On admet pour tout réel a que la fonction f_a est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Étude du cas particulier $a=2$
La fonction f_2 est donc définie pour tout réel x par $f_2(x)=e^x-2x$.
a. Étudier les variations de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$. (On ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition).
b. En déduire que Δ_2 et Γ n'ont pas de point d'intersection.

2. Étude du cas général où *a* est un réel strictement positif
a. Déterminer les limites de la fonction f_a en $+\infty$ et $-\infty$.
b. Étudier les variations de f_a sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_a est $a-a\ln a$.
c. Étudier le signe de $a-a\ln a$ suivant les valeurs du nombre réel strictement positif a.
d. Déterminer selon les valeurs du réel a le nombre de points communs à Γ et Δ_a.

Correction :

1. f_2 est définie sur ℝ par $f_2(x)=\mathrm{e}^x-2x$.

a. f_2 est dérivable sur ℝ et pour tout nombre réel x : $f_2'(x)=\mathrm{e}^x-2$

$\mathrm{e}^x-2=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

$\mathrm{e}^x-2>0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$

$\mathrm{e}^x-2<0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x<2 \Leftrightarrow x<\ln 2$

On donne les variations de f_2 sous forme de tableau :

x	-∞		ln2		+∞
f₂'(x)		−	0	+	
f₂(x)		↘	2 - 2ln2	↗	

$\boxed{f_2(\ln 2)=\mathrm{e}^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2>0}$

b. $f_2(\ln 2)$ est le minimum de f_2 sur ℝ donc pour tout nombre réel x on a $\boxed{f_2(x)\geq f_2(\ln 2)>0}$

Et l'équation $\mathrm{e}^x-2x=0$ **n'admet pas de solution**.

$f_2(x)=0$ est l'équation aux abscisses des points d'intersection de Δ_2 et Γ .

Conséquence : Δ_2 et Γ **n'ont pas de point d'intersection**

2. Étude du cas général

a. a est un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel x : $f_a(x)=\mathrm{e}^x-ax$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -ax=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)=\boxed{+\infty}$

Pour $x\neq 0$ $f_a(x)=x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-a\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-a\right)=+\infty$

Conséquence : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)=\boxed{+\infty}$

b. f_a est dérivable sur ℝ et pour tout nombre réel x on a : $f_2'(x)=\mathrm{e}^x-a$

$\mathrm{e}^x-a=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x=2 \Leftrightarrow x=\ln a$

$\mathrm{e}^x-a>0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x>a \Leftrightarrow x>\ln a$

$\mathrm{e}^x-a<0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x<a \Leftrightarrow x<\ln a$

Tableau de variations

x	$-\infty$		$\ln a$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$a - a\ln a$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{f_a(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a=a-a\ln a}$ est **le minimum** de f_a sur $\mathbb{R}$.

c. $a-a\ln a=a(1-\ln a)$
Or, $a>0$
$1-\ln a=0 \Leftrightarrow 1=\ln a \Leftrightarrow e=a$
$1-\ln a>0 \Leftrightarrow 1>\ln a \Leftrightarrow e>a$
$1-\ln a<0 \Leftrightarrow 1<\ln a \Leftrightarrow e<a$
On donne le signe de $a-a\ln a$ sous **la forme d'un tableau** :

a	$-\infty$		e		$+\infty$
$a - a\ln a$		$-$	0	$+$	

d. Si $\boxed{a<e}$ alors $a-a\ln a>0$
Δ_a et Γ **n'ont pas de point d'intersection**.

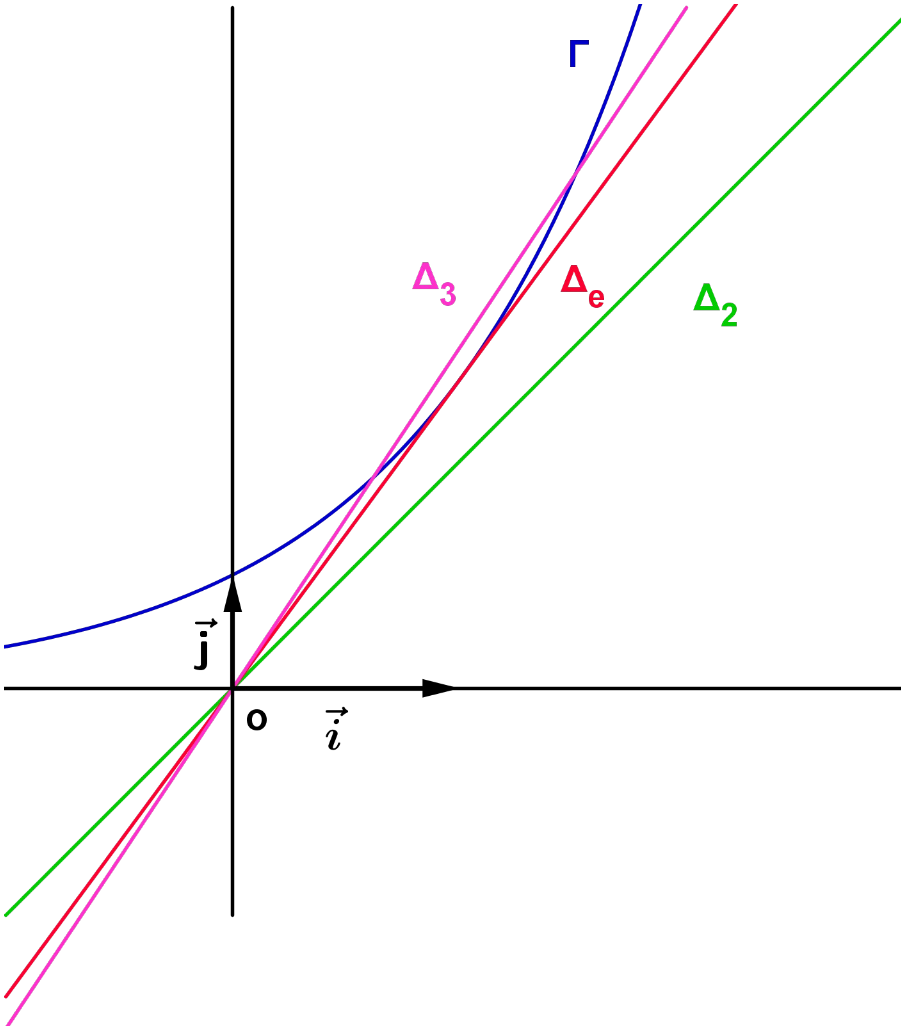
Si $\boxed{a>e}$ alors $a-a\ln a<0$
f_a est **continue** et **strictement décroissante** sur $]-\infty;\ln a]$ à valeurs dans $[a-a\ln a;+\infty[$. Or, 0 appartient à cet intervalle donc **le théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer que l'équation $f_a(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $]-\infty;\ln a]$.

f_a est **continue** et **strictement croissante** sur $[\ln a;+\infty[$ à valeurs dans $[a-a\ln a;+\infty[$. Or, 0 appartient à cet intervalle donc **le théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer que l'équation $f_a(x)=0$ admet une solution unique β appartenant à l'intervalle $[\ln a;+\infty[$.

Conséquence : l'équation aux abscisses des points d'intersection de Γ et Δ_a $f_a(x)=0$ admet deux solutions distinctes α et β donc Γ et Δ_a ont **deux points d'intersection distincts**.

Si $\boxed{a=e}$ alors $a-a\ln a=e-e=0$
Γ et Δ_a ont un point commun **le point de coordonnées** $(1;e)$
Remarque : Δ_e est la tangente à Γ au point de coordonnées $(1;e)$.

Graphique :



Γ
Δ3
Δe
Δ2
j
O
i