Exercice 2 5 points

Une entreprise fabrique des puces électroniques qui sont utilisées pour des matériels aussi différents que des téléphones portables, des lave-linge ou des automobiles. A la sortie de fabrication, 5 % d'entre elles présentent un défaut et sont donc éliminées. Les puces restantes sont livrées aux clients.
On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale à 1000 heures. On observe que 2 % des puces livrées ont une durée de vie courte.
On note L l'événement : « la puce est livrée ».
On note C l'événement : « la puce a une durée de vie courte c'est à dire inférieure ou égale à 1000 heures ».
Étant donné deux événements A et B on note $P_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise.
a. Donner la valeur $P_L(C)$.
b. Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieure à 1000 heures ?
c. Quelle est la probabilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaîne de fabrication ?

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients.

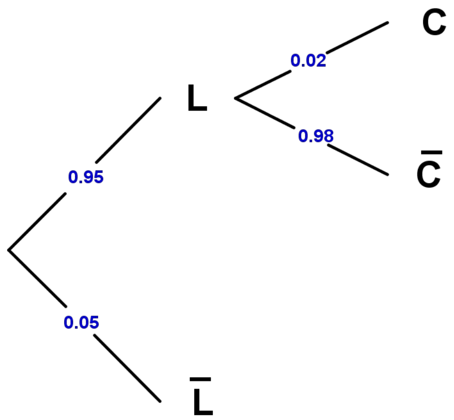
2. On appelle X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie en heures d'une telle puce. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ .
a. Montrer que $\lambda=\frac{-\ln(0,98)}{1000}$.
b. Calculer la probabilité qu'une puce ait une durée de vie supérieure à 10000 heures. On arrondira à 10^{-3} près.
c. Calculer $P(20000\leqslant X\leqslant 30000)$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat.

3. Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication. On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée ait une durée de vie courte est égale à 0,003. On prélève au hasard 15000 puces prêtes à être livrées. On admettra que ce prélèvement de 15000 puces revient à effectuer un tirage avec remise de 15000 puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtres à être livrées.
On appelle Y la variable aléatoire égale au nombres de puces ayant une durée de vie courte dans cet échantillon.
a. Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $n=15000$ et $p=0,003$.
b. Calculer l'espérance de la variable Y.
c. Calculer à 10^{-3} près, la probabilité $P(40\leqslant Y\leqslant 50)$.

Correction :

1.a. L'énoncé précise : « On observe que 2 % des pièces livrées ont une durée de vie courte », donc : $\boxed{P_L(C)=0{,}02}$.

b. L'énoncé précise que : « à la sortie de la fabrication, 5 % des puces présentent un défaut et sont donc éliminées et les puces restantes sont livrées aux clients »
donc $\boxed{P(\bar{L})=0{,}05}$ et $\boxed{P(L)=1-0{,}05=0{,}95}$
On a $\boxed{P_L(C)=0{,}02}$ donc $\boxed{P_L(\bar{C})=1{,}0{,}02=0{,}98}$.
On obtient **l'arbre pondéré** suivant :



On nous demande de déterminer $P(L\cap\bar{C})$
$\boxed{P(L\cap\bar{C})=P(L)\times P_L(\bar{C})=0{,}95\times 0{,}98=0{,}931}$

c. On nous demande de déterminer $P(\bar{L}\cup(L\cap C))$.
Les événements $\bar{L}$ et $(L\cap C)$ sont **incompatibles** donc $P(\bar{L}\cup(L\cap C))=P(\bar{L})+P(L\cap C)$
$P(\bar{L})=0{,}05$ et $P(L\cap C)=P(L)\times P_L(C)=0{,}95\times 0{,}02=0{,}019$
$P(\bar{L}\cup(L\cap C))=0{,}05+0{,}019=$ **0,069**

2.a. X suit la loi exponentielle de paramètre λ donc pour tout réel *t* positif ou nul on a :
$P(X\leqslant t)=1-e^{-\lambda t}$ ou $P(X>t)=e^{-\lambda t}$
L'énoncé donne : $P(X\leqslant 1000)=0{,}02$
$$\boxed{1-e^{-1000\lambda}=0{,}02\Leftrightarrow 0{,}98=e^{-1000\lambda}\Leftrightarrow \ln 0{,}98=-1000\lambda\Leftrightarrow\lambda=-\frac{\ln 0{,}98}{1000}}$$

b. $P(X>10000)=e^{-10000\lambda}=e^{-10\ln 0{,}98}$
La calculatrice nous donne pour valeur approchée à 10^{-3} près : $P(X>10000)=$ **0,817**

c. $P(20000\leqslant X\leqslant 30000)=P(X\leqslant 30000)-P(X\leqslant 20000)=1-e^{-30000\lambda}-(1-e^{-20000\lambda})$
$P(20000\leqslant X\leqslant 30000)=e^{20\ln 0{,}98}-e^{30\ln 0{,}98}$
On obtient en utilisant la calculatrice
$P(20000\leqslant X\leqslant 30000)=0{,}122=$ **0,122**
C'est à dire **12,2 % des puces livrées aux clients ont une durée de vie comprise entre 20 000 heures et 30 000 heures**.

3.a. Épreuve de Bernoulli
On prélève au hasard une puce de l'ensemble des puces livrées aux clients.

Succès : S « cette puce a une durée de vie courte ». $\boxed{P(S)=0{,}003}$

Échec : $\bar{S}$ « cette puce n'a pas une durée de vie courte ». $\boxed{P(\bar{S})=1-P(S)=1-0{,}003=0997}$

Le prélèvement de 15000 puces revient à effectuer un tirage avec remise de 15000 puces dans l'ensemble des puces fabriquées par l'entreprise et prêtes à être livrées. On obtient un schéma de Bernoulli de paramètres : $n=15000$ et $p=0{,}003$
Y est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 15000 épreuves. Donc Y suit la loi binomiale de paramètres $n=15000$ et $p=0{,}003$.

b. L'espérance mathématique de Y est égale à $np=15000\times 0{,}003=45$
$\boxed{E(Y)=45}$.

c. En utilisant la calculatrice on obtient : $P(40\leqslant Y\leqslant 50)$ =0,589.