Exercice 3 5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On rappelle que deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes.

Soient le point A_1 de coordonnées $(0;2;-1)$ et de vecteur $\vec{u}_1$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

On appelle D_1 la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{u}_1$.

On appelle D_2 la droite qui admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+k \\ y=-2k \\ z=2 \end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une droite perpendiculaire à D_1 et D_2 .

1.a. Donner une représentation paramétrique de D_1 .
b. Donner un vecteur directeur de D_2 (on le notera $\vec{u}_2$).
c. Le point $A_2(-1;4;2)$ appartient-il à D_2 ?

2. Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

3. Soit le vecteur $\vec{v}$ $\begin{pmatrix}-6\\-3\\4\end{pmatrix}$

On définit la droite Δ_1 passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{v}$ et la droite Δ_2 passant par A_2 et parallèle à Δ_1 .
Justifier que les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

Dans la suite, on admettra que les droites D_2 et Δ_2 sont perpendiculaires.

4. Soit P_1 le plan défini par les droites D_1 et Δ_1 et P_2 le plan défini par les droites D_2 et Δ_2 .

a. Soit le vecteur $\vec{n}$ $\begin{pmatrix}17\\-22\\9\end{pmatrix}$. Vérifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P_1 .

b. Montrer que P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

5. Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2 . On admettra que le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ .
Utiliser les questions précédentes pour prouver qu'il existe une droite de l'espace perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2 .

Correction :

1.a. D_1 est droite passant par $A_1(0;2;-1)$ est de vecteur directeur $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

On obtient pour **représentation paramétrique** de D_1 : $\begin{cases} x=0+t \\ y=2+2t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=-1+3t \end{cases}$.

b. D_2 a pour **représentation paramétrique** : $\begin{cases} x=1+k \\ y=-2k \quad k\in\mathbb{R} \\ z=2 \end{cases}$

Donc $\vec{u}_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de D_2.

c. $A_2(-1;4;2)$

$\begin{cases} -1=1+k \\ 4=-2k \\ 2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \{k=-2$

Le point A_2 **appartient à la droite** D_2.

2. $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ **ne sont pas colinéaires** car il n'existe pas λ tel que $\vec{u}_2=\lambda\vec{u}_1$.

Donc les droites D_1 et D_2 **ne sont pas parallèles**.

On détermine l'intersection de D_1 et D_2

$\begin{cases} 0+t=1+k \\ 2+2t=-2k= \\ -1+3t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-k=1 \\ t+k=-1 \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=-2 \\ t=1 \end{cases}$

Le **système n'admet pas de solution** donc les droites D_1 et D_2 **ne sont pas sécantes**.

Conclusion : les droites D_1 et D_2 **ne sont pas coplanaires**.

3. $A_1(0;2;-1)$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-3\\4\end{pmatrix}$

Δ_1 est la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Δ_2 est la droite passant par $A_2(-1;4;2)$ et parallèle à Δ_1 donc $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ_2.

$\vec{u}_1 \cdot \vec{v} = 1\times(-6)+2\times(-3)+3\times4=-6-6+12=0$

Donc, les droites D_1 et Δ_1 sont **orthogonales**

A_1 est un point commun à D_1 et Δ_1.

Conséquence : les droites D_1 et Δ_1 sont **perpendiculaires**.

On admet que D_2 et Δ_2 sont perpendiculaires.

4.a. P_1 est le plan défini par les droites D_1 et Δ_1 .

$\vec{n}\begin{pmatrix}17\\-22\\4\end{pmatrix}$ est **un vecteur normal** à P_1 si et seulement si $\vec{n}$ est **orthogonal** à $\vec{u}_1$ et à $\vec{v}$.

$\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 1\times 17+2\times(-22)+3\times 9=17-44+27=0$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = -6\times 17-3\times(-22)+4\times 9=-102+66+36=0$

Conclusion : $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à P_1 .

b. Les plans P_1 et P_2 sont **parallèles** si et seulement si $\vec{n}$ est **un vecteur normal** à P_2 .

Or, $\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 1\times 17-2\times(-22)+0\times 9=17+44=61\neq 0$

Donc $\vec{n}$ **n'est pas un vecteur normal** à P_2 .

Conséquence : les plans P_1 et P_2 **ne sont pas parallèles**

5. Les plans P_1 et P_2 sont donc sécants.

Soit Δ leur droite d'intersection, **le théorème du toit** nous permet d'affirmer que $\vec{v}$ est **un vecteur directeur** de Δ (car Δ_1 et Δ_2 sont parallèles et que Δ_1 est contenue dans P_1 et que Δ_2 est contenue dans P_2 , les plans P_1 et P_2 étant sécants donc leur droite d'intersection Δ est parallèle à Δ_1 et Δ_2 .)

Les droites Δ_1 et Δ sont parallèles et contenues dans le plan P_1 , D_1 est contenue dans P_1 et est perpendiculaire à Δ_1 donc D_1 est perpendiculaire à Δ .

On justifie de même que D_2 est perpendiculaire à Δ .

Conclusion :

Δ est **une perpendiculaire commune aux deux droites non coplanaires** D_1 et D_2 .