Exercice 4 — Candidats n'ayant pas suivi la spécialité — 5 points

On note (u_n) et (v_n) les suites réelles définies, pour tout entier naturel n, par :

$u_0=1$ $\quad$ $v_0=0$ $\quad$ $\begin{cases} u_{n+1}=\sqrt{3}u_n-v_n \\ v_{n+1}=u_n+\sqrt{3}v_n \end{cases}$

1. Calculer les valeurs de u_1 , v_1 , u_2 , v_2 .

2. On souhaite construire un algorithme qui affiche les valeurs de u_N et v_N pour un entier naturel donné N.

a. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	N est un nombre entier
Variables :	K est un nombre entier
	S est un nombre réel
	T est un nombre réel
Initialisation :	Affecter 1 à S
	Affecter 0 à T
	Affecter 0 à K
Traitement :	Tant que K < N
	Affecter $\sqrt{3}S-T$ à S
	Affecter $S+\sqrt{3}T$ à T
	Affecter $K+1$ à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher S
	Afficher T

Faire fonctionner cet algorithme pour $N=2$. Pour cela, on recopiera et complétera le tableau de variables ci-dessous.

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1

b. L'algorithme précédent affiche t-il les valeurs de u_N et v_N pour un entier N donné ? Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de l'algorithme proposé qui affiche bien les valeurs de u_N et v_N pour un entier N.

3. On pose, pour tout entier naturel n, $z_n=u_n+\mathrm{i}\,v_n$. On note a le nombre complexe $a=\sqrt{3}+\mathrm{i}$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=az_n$

b. Écrire a sous forme exponentielle.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_n=2^n\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \\ v_n=2^n\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \end{cases}$

Correction :

1. $\boxed{u_1=\sqrt{3}u_0-v_0=\sqrt{3}}$
$\boxed{v_1=u_0+\sqrt{3}v_0=1}$

$\boxed{u_2=\sqrt{3}u_1-v_1=3-1=2}$
$\boxed{v_2=u_1+\sqrt{3}v_1=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}}$

2.a. S : 1 T : 0 K : 0
S : $\sqrt{3}$ T : $\sqrt{3}$ K : 1
S : $3-\sqrt{3}$ T : $6-\sqrt{3}$ K : 2
On donne les résultats sous forme de tableau.

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1
$3-\sqrt{3}$	$6-\sqrt{3}$	2

b. On n'obtient pas u_2 et v_2 pour $K=N=2$
Le problème vient du fait que dans une boucle on utilise la nouvelle affectation de S pour calculer T.
On peut corriger l'algorithme en utilisant une variable supplémentaire : R.

Entrée : N est un nombre entier
Variables : K est un nombre entier
S est un nombre réel
T est un nombre réel
R est un nombre réel
Initialisation : Affecter 1 à S
Affecter 0 à T
Affecter 0 à K
Traitement : Tant que K < N
Affecter S à R
Affecter $\boxed{\sqrt{3}R-T}$ **à S**
Affecter $\boxed{R+\sqrt{3}T}$ **à T**
Affecter $K+1$ à K
Fin Tant que
Sortie : Afficher S
Afficher T

Pour $N=2$
S ; 1 T : 0 K : 0
S : $\sqrt{3}$ T : 1 K : 1
S : 2 T : $2\sqrt{3}$ K : 2
On les résultats sous forme de tableau

S	T	K
1	0	0
$\sqrt{3}$	1	1
2	$2\sqrt{3}$	2

3. a. Pour tout entier naturel n

$$\boxed{az_n=(\sqrt{3}+\mathrm{i})(u_n+\mathrm{i}v_n)=\sqrt{3}u_n-v_n+\mathrm{i}(u_n+\sqrt{3}v_n=u_{n+1}+\mathrm{i}v_{n+1}=z_{n+1})}$$

b. $a=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ $\quad |a|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$ $\quad a=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{2}$ donc $\frac{\pi}{6}$ est un argument de a.

$$\boxed{a=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$$

c. $Z_0=u_0+\mathrm{i}v_0=1$

Pour tout entier naturel n : $z_{n+1}=az_n$ donc (z_n) est **la suite géométrique** de **premier terme** $z_0=1$ et de **raison** q=a.

Pour tout entier naturel n

$$z_n=1\times a^n=a^n$$

$$z_n=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^n=2^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^n=2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$$

$$z_n=2^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right)=u_n+\mathrm{i}v_n$$

$$\boxed{\begin{cases} u_n=2^n\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) \\ v_n=2^n\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}}$$