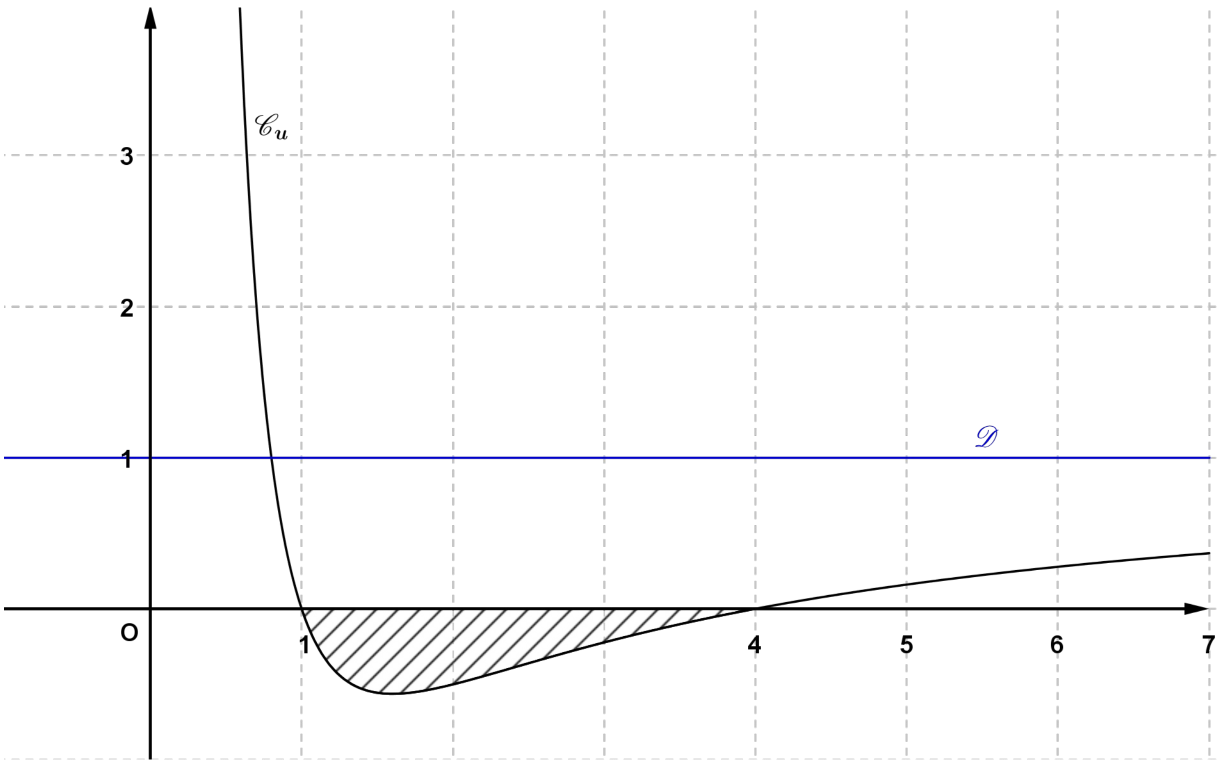
Exercice 1 6 points

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $u(x)=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$ où a, b et c sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=1$.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points $A(1;0)$ et $B(4;0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.

2. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.

3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x)=\frac{x^2-5x+4}{x^2}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-5\ln x-\frac{4}{x}$

1. déterminer la limite de f(x) lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$.

2. Déterminer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Démontrer que, pour tout réel x strictement, $f'(x)=u(x)$.

En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Partie C

1. Déterminer l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique de la partie A

2. Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note $\mathcal{A}_{\lambda}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x;y)$ telles que : $4\leqslant x\leqslant\lambda$ et $0\leqslant y\leqslant u(x)$.
Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $\mathcal{A}_{\lambda}=\mathcal{A}$?
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructu-euse, sera prise en compte dans l'évaluation.

CORRECTION

Partie A

1. $\mathscr{C}_u$ passe par les points $A(1;0)$ et $B(4;0)$ donc $u(1)=0$ et $u(4)=0$.

2. $\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y=1$.
$\mathscr{D}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_u$ en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=1$.

Or $u(x)=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=a$.

conséquence
a = 1.

3. Pour tout nombre réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, $u(x)=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$

or $a=1$ donc $u(x)=1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$

$u(1)=0$ donc $0=1+b+c$

$u(4)=0$ donc $0=1+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{16}$

On obtient : $b+c=-1$ et $4b+c=-16$

soit $3b=-15$ $b=-\dfrac{15}{3}=-5$ et $c=-1+5=4$

Conclusion

$u(x)=1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}$ soit $u(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2}$

Partie B

1. Pour tout nombre réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{x^2-5x\ln(x)-1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to0} x^2-5x\ln(x)=0$ car $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x)=0$

donc $\lim\limits_{x\to0}(x^2-5\ln(x)-4)=-4$ et $\lim\limits_{x\to0} x=0$ $(x>0)$

Conséquence
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2. $f(x)=x\left(1-5\dfrac{\ln(x)}{x}\right)-\dfrac{4}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3. f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$f'(x)=1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}=u(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2}$

On détermine le signe de u(x), en utilisant le graphique ou enutilisant le signe d'un trinôme en remarquant que $u(x)=\dfrac{(x-1)(x-4)}{x^2}$.

On obtient le tableau de variation de f

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

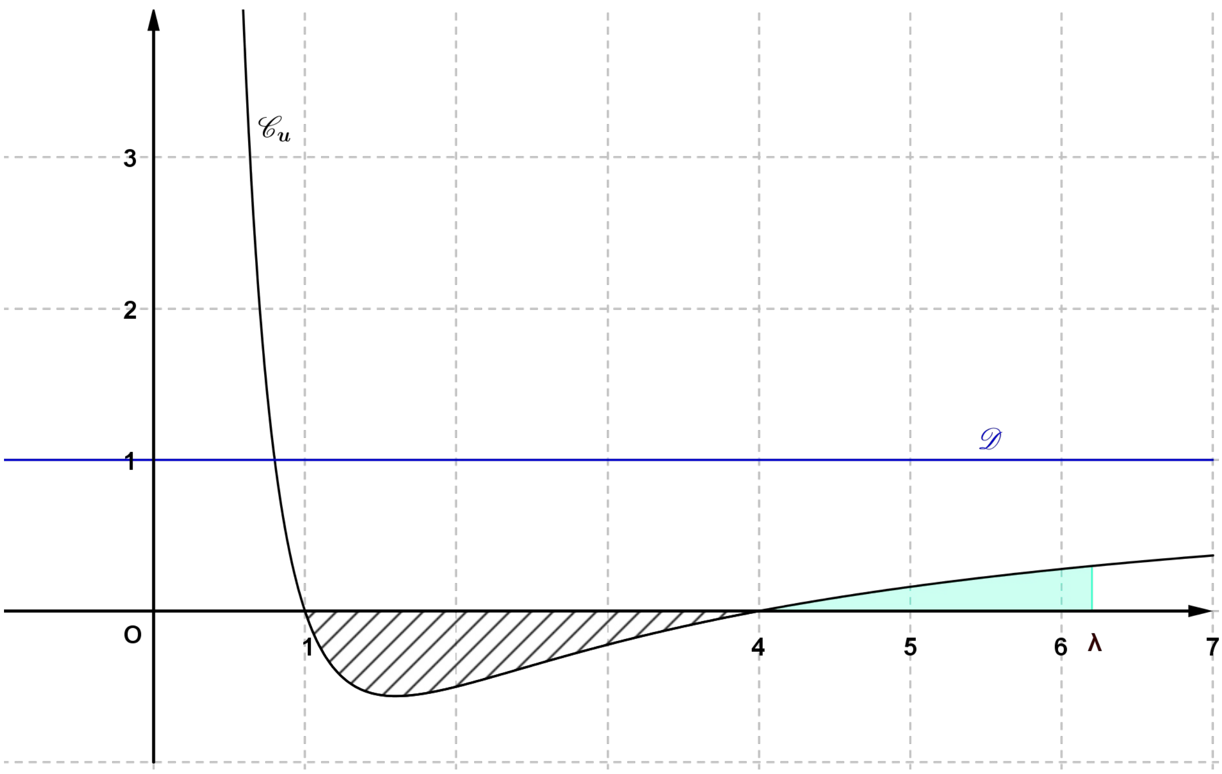
$f(1)=1-4=-3$
$f(4)=4-5\ln(4)-1=3-5\ln(4)=-3{,}93$ à 10^{-2} près

Partie C

1. u est continue et **négative** sur [1;4] donc l'aire en U.A. de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_u$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=4$ est : $\mathscr{A} = -\int_1^4 u(x)\,dx$.

f est une primitive de u sur $]0;+\infty[$ donc :
$\mathscr{A} = -(f(4)-f(1))=f(1)-f(4)$
$f(1)=-3$
$f(4)=3-5\ln(4)$
$\mathscr{A} = 5\ln(4)-6$ U.A.
$\mathscr{A} = 0{,}93$ à 10^{-2} près

2. λ est un réel supérieur ou égal à 4.
u est continue est positive sur $[4;+\infty[$ doncl'aire en U.A. de la partie de plan comprise entre $\mathscr{C}_u$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=4$ et $x=\lambda$ est : $\mathscr{A}_\lambda = \int_4^\lambda u(x)\,dx$



f est une primitive de u sur $]0;+\infty[$

$\mathscr{A}_{\lambda} = f(\lambda)-f(4)$

$\mathscr{A}_{\lambda} = \lambda-5\ln(\lambda)-\dfrac{4}{\lambda}-(3-5\ln(4))$

$\mathscr{A}_{\lambda} = \lambda-5\ln(\lambda)-\dfrac{4}{\lambda}-3+5\ln(4)$ U.A.

$\mathscr{A}_{\lambda}=\mathscr{A} \Leftrightarrow f(\lambda)-f(4)=f(1)-f(4) \Leftrightarrow f(\lambda)=f(1)=-3$

On considère la fonction g définie sur $[4;+\infty[$ par $g(\lambda)=f(\lambda)+3$

$g'(\lambda)=f'(\lambda)=u(\lambda)\geqslant 0 \quad (\ u(4)=0\ )$

donc g est continue et strictement croissante sur $[4;+\infty[$

$g(4)=-0{,}93$ à 10^{-2} près et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} g(\lambda)= +\infty$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $g(\lambda)=0$ admet une solution unique λ_0 appartenant à l'intervalle $[4;+\infty[$.

En utilisant la calculatrice on obtient une valeur approchée de λ_0 .

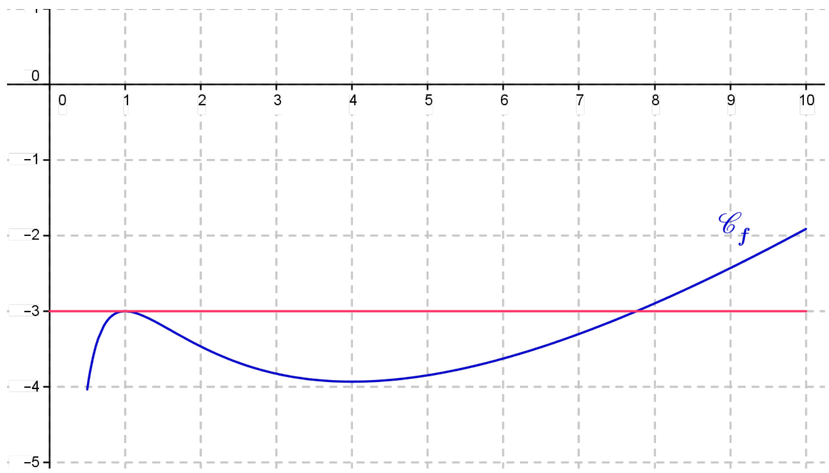
$7{,}7\leqslant\lambda_0\leqslant 7{,}8$ donc $\lambda_0=7{,}7$ à 10^{-1} près.

Et ona $\mathscr{A}_{\lambda_0}=\mathscr{A}$

<u>Remarque</u>

En utilisant la calculatrice, on peut obtenir la courbe représentative de f.

$g(\lambda)=0\Leftrightarrow f(\lambda)=f(1)=-3$



L'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y=-3$ est : λ_0 .