Exercice 2 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. L'abscence de réponse n'est pas pénalisée.Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
L'espace est muni d'un repère d'un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. lespoints A, B, C sont définis par leurs coordonnées.
$A(3;-1;4)$ $B(-1;2;-3)$ $C(3;-1;2)$
Le plan P a pour équation cartésienne : $2x-3y+2z-7=0$
La droite Δ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=-1+4t \\ y=4-t \\ z=-8+2t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

Affirmation 1 : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

Affirmation 2 : Les points A, B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne : $2x+5y+z-5=0$.

Affirmation 3 : Tous les points dont les coordonnées $(x;y;z)$ sont données par :
$\begin{cases} x=1+s-2s' \\ y=1-2s+s' \\ z=1-4s+2s' \end{cases}$ $s\in\mathbb{R}$ et $s'\in\mathbb{R}$ appartiennent au plan P.

Affirmation 4 : Il existe un plan parallèle au plan P qui contient la droite Δ .

CORRECTION

Affimation 1 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AC).

$\vec{V}\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ Est un vecteur directeur de Δ

$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{V} = 1\times 4+0\times(-1)+(-2)\times 2=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux donc les droites (AC) et Δ sont orthogonales.

Affirmation 2 : $\boxed{\text{VRAIE}}$

On vérifie que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\3\\-7\end{pmatrix}$, il n'existe pas de nombre réel a, non nul,tel que $\overrightarrow{AC} = a\,.\,\overrightarrow{AB}$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés, et les points A, B et C déterminent un plan.

$A(3;-1;4)$

$2x_A+5y_A+z_A-5=2\times 3+5\times(-1)+1\times 4-5=6-5+4-5=0$

$B(-1;2;-3)$

$2x_B+5y_B+z_B-5=2\times(-1)+5\times 2+1\times(-3)-5=-2+10-3-5=0$

$C(4;-1;2)$

$2x_C+5y_C+z_C-5=2\times 4+5\times(-1)+1\times 2-5=8-5+2-5=0$

donc A, B et C appartiennent au plan d'équation : $2x+5y+z-5=0$

Conclusion

$2x+5y+z-5=0$ est une équation du plan (ABC).

Affirmation 3 : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Pour $s=s'=0$ on obtient $x=y=z=1$

Or $2\times 1-3\times 1+2\times 1-7=2-3+2-7=-6\neq 0$ donc le point $E(1;1;1)$ n'appartient pas au plan P d'équation : $2x-3y+2z-7=0$.

Affirmation 4 : $\boxed{\text{FAUSSE}}$

$\vec{N}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P

Δ est contenue dans un plan parallèle au plan P si et seulement si Δ est parallèle à P.

Δ est parallèle au plan P si et seulement si $\vec{V}\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{N}$.

$\vec{N}\cdot\vec{V} = 2\times 4+(-3)\times(-1)+2\times 2=8+4+4=16\neq 0$

Il n'existe pas de plan parallèle à P contenant Δ .