

Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- . en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- . chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- . chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n , on note :

- . u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimés en millions d'habitants ;
- . v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0=90$ et $v_0=30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population est constante par une relation liant u_n et v_n .
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites u_n et v_n .

Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, copiées vers le bas permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82.5	37.5
4	2	76.125	43.875
5	3	70.706	49.294
6	4	66.100	53.900
7	5	62.185	57.815
8	6	58.857	61.143
9	7	56.029	63.971
10	8	53.625	66.375
11	9	51.581	68.419
12	10	49.844	70.156
13	11	48.367	71.633
14	12	47.112	72.888
15	13	46.045	73.955
16	14	45.138	74.862
17	15	44.368	75.632
18	16	43.713	76.287
19	17	43.156	76.844
20	18	42.682	77.318
21	19	42.280	77.720
22	20	41.938	78.062

.....

59	57	40.005	79.995
60	58	40.004	79.995
61	59	40.003	79.997
62	60	40.003	79.997
63	61	40.002	79.998

3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,85 u_n + 6$.

1.a. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

b. On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n .

Que peut-on en déduire quand à la suite (u_n) ?

2. On considère la suite (w_n) définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geq 0$.

a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

b. Endéduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n .

c. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .

3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3 de la partie A.

4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geq 120 - u$, faire n prend la valeur $n+1$ u prend la valeur $0,85 \times u + 6$
Sortie :	Fin Tant que Afficher n

a. Que fait cet algorithme ?

b. Quelle valeur affiche-t-il ?

CORRECTION
Partie A

1. La population de ce pays est constante égale à 120 millions.

Pour tout entier naturel n : $u_n + v_n = 120$

2. Pour tout entier naturel n :

u_n est la population en zone rurale, en millions d'habitants, en l'année 2010+n.

u_{n+1} est la population en zone rurale, en millions d'habitants, en l'années 2010+n+1.

v_n est la population en ville, en millions d'habitants, en l'année 2010+n.

v_{n+1} Est la population en ville, en millions d'habitants, en l'année 2010+n+1.

« Chaque année 10 % des ruraux émigrent en ville et 5 % des citadins émigrent en zone rurale »

$$\text{donc } u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100}u_n + \frac{5}{100}v_n = 0,9u_n + 0,05v_n$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{10}{100}u_n - \frac{5}{100}v_n = 0,1u_n + 0,95v_n$$

On peut écrire en A3, B3 et C3 les formules suivantes :

$$A3 : = A2 + 1$$

$$B3 : = 0,9 \times B2 + 0,05 \times C2$$

$$C3 : = 0,1 \times B2 + 0,95 \times C2$$

3. Dans un avenir lointain, la population rurale sera de 40 millions et la population ville sera de 80 millions.

Partie B

On admet que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,85u_n + 6$

Remarque

On peut facilement justifier ce résultat.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05v_n$ et $u_n + v_n = 120$ soit $v_n = 120 - u_n$.

On obtient $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05 \times (120 - u_n) = (0,9 - 0,05)u_n + 0,05 \times 120 = 0,85u_n + 6$

1.a. (u_n) est une suite décroissante si et seulement si pour tout entier n , on a : $u_{n+1} \leq u_n$.

On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n ,

on a : $u_{n+1} \leq u_n$ (ou $u_{n+1} - u_n \leq 0$)

Initialisation

Pour $n=0$

$$u_0 = 90 \text{ et } u_1 = 82,5$$

$$u_1 - u_0 = 82,5 - 90 = -7,5 \leq 0 \text{ donc } u_1 \leq u_0.$$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel n , on suppose que :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \text{ et on doit démontrer que : } u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0.$$

Or $u_{n+1} = 0,85u_n + 6$ et $u_{n+2} = 0,85u_{n+1} + 6$ donc

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 0,85u_{n+1} + 6 - (0,85u_n + 6) = 0,85(u_{n+1} - u_n)$$

$0,85 > 0$ donc $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$ car $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$ soit

$u_{n+1} \leq u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante.

b. On admet que, pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n$.

Conséquence

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc la suite (u_n) est convergente.

2. Pour tout entier naturel n : $w_n = u_n - 40$ donc $u_n = w_n + 40$.

a. $w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85 u_n + 6 - 40 = 0,85(w_n + 40) - 34 = 0,85 w_n + 34 - 34 = 0,85 w_n$
donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

b. $w_0 = u_0 - 40 = 90 - 40 = 50$

Pour tout entier naturel n : $w_n = w_0 q^n = 50 \times 0,85^n$

$$u_n = w_n + 40 = 50 \times 0,85^n + 40$$

c. Pour tout entier naturel n : $v_n = 120 - u_n$

$$v_n = 120 - 40 - 50 \times 0,85^n = 80 - 50 \times 0,85^n$$

3. $0 < 0,85 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 40$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 80$.

Donc dans un avenir lointain, la population en zone rurale sera de 40 millions et la population en ville sera de 80 millions.

4.a. Pour tout entier naturel n , on a :

$$v_n = 120 - u_n \text{ et } u_{n+1} = 0,85 u_n + 6$$

donc l'algorithme permet de déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $u_n < v_n$

b. En regardant les résultats donnés par le tableur on obtient :

pour $n = 5$ $u_5 \geq v_5$ et pour $n = 6$ $u_6 < v_6$ donc **$n = 6$** .

Conclusion

En $2010 + 6 = 2016$, pour la première année, la population en ville sera supérieure à la population en zone rurale.