Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :
. en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
. chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
. chaque année, 5 % deses citadins émigrent en zone rurale.
Pour tout entier naturel n,on note :
. R_n l'effectif dela population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010+n ;
. C_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010+n.
On a donc $R_0=90$ et $C_0=30$.

1. On considère les matrices $M=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}05\\ 0{,}1 & 0{,}95\end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n=\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=MU_n$.
b. Calculer U_1 . En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011.

2. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de M^n et de U_0 .

3. Soit la matrice $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P et on la notera P^{-1} .

4.a. On pose $\Delta=P^{-1}MP$. Calculer Δ à l'aide de la calculatrice.
b. Démontrer que : $M=P\Delta P^{-1}$.
c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul.
$$M^n=P\Delta^n P^{-1} .$$

5.a. On admet que le calcul matriciel précédent donne :
$$M^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0{,}85^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0{,}85^n\\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0{,}85^n & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0{,}85^n\end{pmatrix}$$
En déduire que, pour tout entier naturel n, $R_n=50\times 0{,}85^n+40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n.
b. Déterminer la limite de R_n et de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour la population étudiée ?

6.a. On admet que (R_n) est décroissante et que C_n est croissante.
Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il affiche le nombre d'année au bout la population urbaine dépassera la population rurale.
b. En résolvant l'inéquation d'inconnue n, $50\times 0{,}85^n+40<80-50\times 0{,}85^n$ retrouver la valeur affi-chée par l'algorithme.

ANNEXE
(à compléter et à remettre avec la copie)

Entrée : n, R et C sont des nombres
Initialisation : n prend la valeur 0
R prend la valeur 90
C prend la valeur 30
Traitement : Tant que . . . . faire
n prend la valeur . . . .
R prend la valeur $50\times 0{,}85^{n}+40$
C prend la valeur . . . .
Fin Tant que
Sortie : Afficher n

CORRECTION

1.a. Pour tout entier naturel n

R_n est l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010+n.

R_{n+1} est l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010+n+1.

C_n est l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010+n.

C_{n+1} est l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010+n+1.

Chaque année 10 % des ruraux émigrent en ville et 5 % des citadins émigrent à la zone rurale, donc

$$R_{n+1}=R_n-\frac{10}{100}R_n+\frac{5}{100}C_n=0{,}9\,R_n+0{,}05\,C_n$$

$$C_{n+1}=C_n+\frac{10}{100}R_n+\frac{5}{100}C_n=0{,}1\,R_n+0{,}95\,C_n$$

En utilisant la notation matricielle on obtient : $\begin{pmatrix}R_{n+1}\\C_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}05\\0{,}1 & 0{,}95\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_n\\C_n\end{pmatrix}$.

on a $U_{n+1}=\begin{pmatrix}R_{n+1}\\C_{n+1}\end{pmatrix}$ $M=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}05\\0{,}1 & 0{,}95\end{pmatrix}$ et $U_n=\begin{pmatrix}R_n\\C_n\end{pmatrix}$ donc $U_{n+1}=MU_n$.

b. $U_0=\begin{pmatrix}90\\30\end{pmatrix}$ donc $U_1=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}05\\0{,}1 & 0{,}95\end{pmatrix}\begin{pmatrix}90\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}81+1{,}5\\9+28{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}82{,}5\\37{,}5\end{pmatrix}$

$R_1=82{,}5$ et $C_1=37{,}5$.

En 2011, il y a 82,5 millions de ruraux et 37,5 millions de citadins.

2. $U_2=MU_1=M(MU_0)=M^2U_0$ et pour tout entier non nul n, $U_n=M^nU_0$ (on peut justifier ce résultat en effectuant un raisonnement par récurrence).

3. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\times1+\frac{2}{3}\times1 & 1\times\frac{1}{3}+1\times\left(-\frac{1}{3}\right)\\\frac{2}{3}\times1-\frac{1}{3}\times2 & 2\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times2 & \frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times(-1)\\\frac{2}{3}\times1-\frac{1}{3}\times2 & \frac{1}{3}\times2-\frac{1}{3}\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

donc la matrice inverse de $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$ est la matrice : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

4.a. $\Delta=P^{-1}MP$

$$\Delta=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}05\\0{,}1 & 0{,}95\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}9\times1+0{,}05\times2 & 0{,}9\times1+0{,}05\times(-1)\\0{,}1\times1+0{,}95\times2 & 0{,}1\times1+0{,}95\times(-1)\end{pmatrix}$$

$$\Delta=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0{,}85\\2 & -0{,}85\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times2 & \frac{1}{3}\times0{,}85+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\\\frac{2}{3}\times2-\frac{1}{3}\times2 & \frac{2}{3}\times0{,}85-\frac{1}{3}\times(-0{,}85)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0{,}85\end{pmatrix}$$

b. $P\Delta P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0{,}85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0{,}85\\ 2 & -0{,}85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$$P\Delta P^{-1}=\begin{pmatrix}1\times\frac{1}{3}+0{,}85\times\frac{2}{3} & 1\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0{,}85\\ 2\times\frac{1}{3}-0{,}85\times\frac{2}{3} & 2\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times(-0{,}85)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2{,}7}{3} & \frac{0{,}15}{3}\\ \frac{0{,}3}{3} & \frac{2{,}85}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}05\\ 0{,}1 & 0{,}95\end{pmatrix}=M$$

donc $M=P\Delta P^{-1}$.

c. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, non nul, on a : $M^n=P\Delta^n P^{-1}$.

<u>Initialisation</u>

Pour $n=1$

$M^1=M$ et $P\Delta^1 P^{-1}=P\Delta P^{-1}$ or $M=P\Delta P^{-1}$

donc la propriété est vérifiée pour $n=1$

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que propriété est héréditaire pour tout entier naturel, non nul, n on suppose que $M^n=P\Delta^n P^{-1}$ et on doit démontrer que $M^{n+1}=P\Delta^{n+1}P^{-1}$.

Or $M^{n+1}=MM^n=(P\Delta P^{-1})(P\Delta^n P^{-1})=P\Delta(P^{-1}P)\Delta^n P^{-1}=P\Delta I\Delta^n P^{-1}=P\Delta\Delta^n P^{-1}=P\Delta^{n+1}P^{-1}$

<u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel, non nul, n on a : $M^n=P\Delta^n P^{-1}$.

5.a. On admet que pour tout entier naturel, non nul, n on a :

$$M^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0{,}85^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0{,}85^n\\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0{,}85^n & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0{,}85^n\end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel non nul n :

$$U_n=\begin{pmatrix}R_n\\ C_n\end{pmatrix}=M^n U_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0{,}85^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0{,}85^n\\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0{,}85^n & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0{,}85^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}90\\ 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30+60\times 0{,}85^n+10-10\times 0{,}85^n\\ 60-60\times 0{,}85^n+20+10\times 0{,}85^n\end{pmatrix}$$

$$U_n=\begin{pmatrix}40+50\times 0{,}85^n\\ 80-50\times 0{,}85^n\end{pmatrix}$$

donc $R_n=40+50\times 0{,}85^n$ et $C_n=80-50\times 0{,}85^n$

b. $0<0{,}85<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}85^n=0$

on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n=\mathbf{40}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n=\mathbf{80}$.

Dans un avenir lointain, le nombre de ruraux sera de 40 millions et le nombre de citadins sera de 80 millions.

6.a. **ANNEXE**

(à rendre avec la copie)

Entrée :	n, R et C sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	R prend la valeur 90
	C prend la valeur 30
Taitement :	Tant que $R \geqslant C$ faire
	n prend la valeur n+1
	R prend la valeur $50\times 0{,}85^n+40$
	C prend la valeur $80-50\times 0{,}85^n$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

b. $R_n < C_n \Leftrightarrow 50\times 0{,}85^n < 80-50\times 0{,}85^n \Leftrightarrow 100\times,85^n < 40 \Leftrightarrow 0{,}85^n < \frac{40}{100} = 0{,}4$

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}85^n) < \ln(0{,}4) \Leftrightarrow n\ln(0{,}85) < \ln(0{,}4)$

$0 < 0{,}85 < 1$ donc $\ln(0{,}85) < 0$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}4)}{\ln(0{,}85)}$

En utilisant la calculette on obtient : $\frac{\ln(0{,}4)}{\ln(0{,}85)} = 5{,}64$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel.

$\Leftrightarrow n \geqslant 6$

donc la valeur affichée par l'algorithme est : **6**.

Conséquence

Le nombre de citadins sera supérieur au nombre de ruraux pour la première fois en $2010+6=2016$.