Exercice 1 — 7 points

Une entreprise produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille est inférieur à 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est très peu calcaire.
Dans cet exercice les résultats approchés seront arrondis au millième.

PARTIE A

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source A » et « source B ».
La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevé au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est 0,17. La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est 0,10.
La source A fournit 70 % de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B le reste de cette production.

On prélève au hasard une bouteille d'eau dans la production totale de la journée. On considère les événements suivants :
A : « La bouteille d'eaun provient de la source A »
B : « La bouteille provient de la source B »
S : « L'eau contenue dans la bouteille d'eau est très peu calcaire ».

1. Déterminer la probabilité de l'événement $A \cap S$.

2. Montrer que la probabilité de l'événement S vaut 0,149.

3. Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire

4. Le lendemain d'une forte pluie, l'usine prélève un échantillon de 1000 boutielles provenant de la source A. Parmi ces bouteilles, 211 contiennent de l'eau très peu calcaire.
Donner un intervalle permettant d'estimer au seuil de 95 % la proportion de bouteilles contenant de l'eau très peu calcaire sur l'ensemble de la production de la source A après cet intempérie.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A, associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 8 et d'écart type 1,6.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard, associe le taux de calcium qu'elle contient. On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 9 et d'écart type σ .

1. Déterminer la probabilité pour que le taux de calcium mesuré dans une bouteille prise au hasard dans la production d'une journée de la source A soit compris entre 6,4 mg et 9,6 mg.

2. Calculer la probabilité $P(X \leqslant 6{,}5)$

3. Déterminer σ sachant que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B contienne de l'eau très peu calcaire est 0,1.

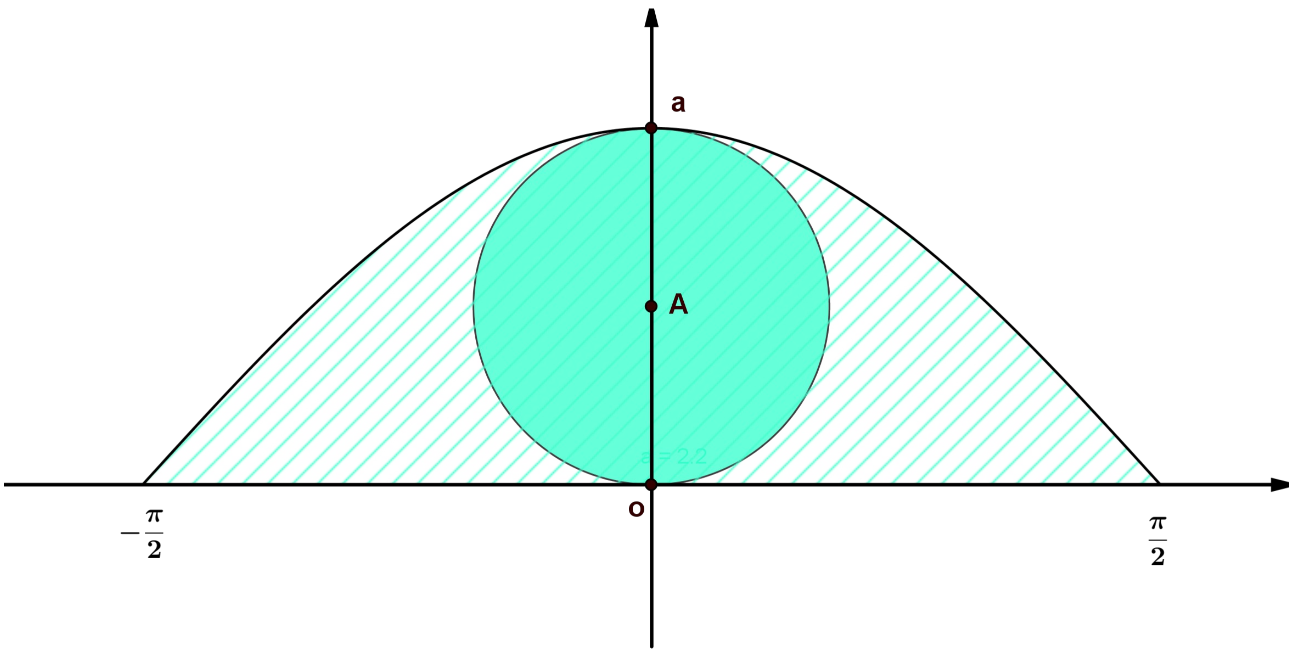
Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Partie C

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.
La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \text{a}\cos x$ avec appartenant à lintervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et a un nombre réel strictement positif.
Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre A de coordonnées $\left(0\,;\frac{\text{a}}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\text{a}}{2}$. on admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de a inférieures à 1,4.

1. Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à 2a U.A.

2. Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface hachurée.
Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte ?



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

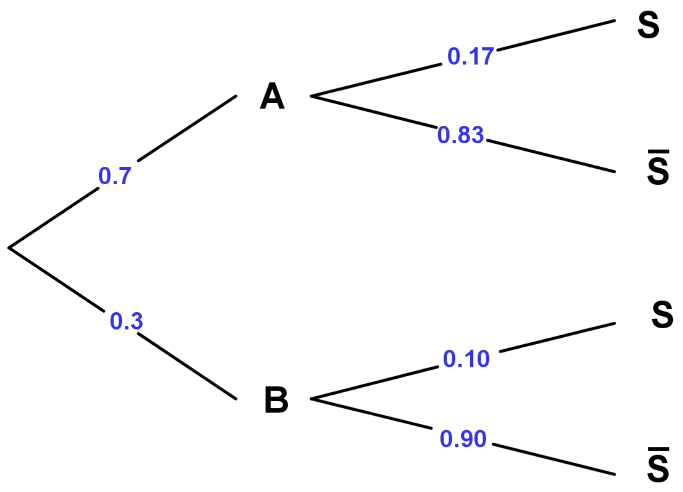
L'énoncé précise :

. « La source A fournit 70 % de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B le reste de cette production » donc $P(A)=0,7$ et $P(B)=1-0,7=0,3$.

. « La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est : 0,17 » donc $P_A(S)=0,17$ et $P_A(\bar{S})=1-0,17=0,83$.

. « La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est : 0,10 » donc $P_B(S)=0,10$ et $P_B(\bar{S})=1-0,10=0,90$.

On obtient l'arbre pondéré suivant :



1. $P(A\cap S)=P(A)\times P_A(S)=0,7\times 0,17$ = $\underline{\mathbf{0,119}}$

2. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :

$P(S)=P(A\cap S)+P(B\cap S)$

$P(S)=0,009+P(B)\times P_B(S)=0,119+0,3\times 0,1=0,119+0,03$ = $\underline{\mathbf{0,149}}$

3. On demande de calculer $P_S(A)$

$P_S(A)=\dfrac{P(A\cap S)}{P(S)}=\dfrac{0,119}{0,149}$ = $\underline{\mathbf{0,799}}$

4. La proportion observée dans l'échantillon de 1000 bouteilles est : $p=\dfrac{211}{1000}=0,211$.

$n=1000\geqslant 30$ et $np=1000\times 0,211=211\geqslant 5$ et $n(1-p)=1000\times 0,789=789\geqslant 5$

On peut considérer l'intervalle de confiance au seuil de 95 %

$I=\left[0,211-\dfrac{1}{\sqrt{1000}};0,211+\dfrac{1}{\sqrt{1000}}\right]$

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$I=[0,179;0,243]$

Partie B

1. La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne : $\mu=8$ et d'écart type : $\sigma=1,6$.

$P(6,4\leqslant X\leqslant 9,6)=P(8-1,6\leqslant X=8+1,6)=P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)$ = $\underline{\mathbf{0,683}}$

(résultat de cours à connaître mais on retrouve ce résultat avec la calculatrice)

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2. En utilisant la calculatrice, on obtient :
$P(X \leqslant 0{,}65) = \underline{\mathbf{0{,}174}}$

3. La variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu=9$ et d'écart type σ donc la variable aléatoire $Z=\dfrac{Y-9}{\sigma}$ suit la loi normale centrée et réduite.

On précise que $P(Y \leqslant 6{,}5)=0{,}1$

$(Y \leqslant 6{,}5) \Leftrightarrow \left(\dfrac{Y-9}{\sigma} \leqslant \dfrac{6{,}5-9}{\sigma}\right) \Leftrightarrow \left(Z \leqslant -\dfrac{2{,}5}{\sigma}\right)$

En utilisant la calculatrice, on obtient :
$P(Z \leqslant -1{,}2816)=0{,}1$

donc $-\dfrac{2{,}5}{\sigma}=-1{,}2816 \Leftrightarrow \sigma=\dfrac{2{,}5}{1{,}2816}=\underline{\mathbf{0{,}195}}$.

Partie C

1. Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=a\cos x$.

f est continue et positive sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc l'aire $\mathscr{A}$ en U.A.de la partie de plan comprise entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-\dfrac{\pi}{2}$ et $x=\dfrac{\pi}{2}$ est : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

Or la fonction F, définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $F(x)=a\sin x$, est une primitive de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ car $(\sin x)'=\cos x$.

$$\mathscr{A}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-a\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=a+a=2a$$

$\mathscr{A}=2a$ U.A.

2. Sachant que le disque se trouve entièrement sous la courbe $\mathscr{C}$, l'aire de la partie de plan hachurée est égale à l'aire du disque est égale à : a= $\dfrac{1}{2}\mathscr{A}$.

$\pi\times\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=a \Leftrightarrow \pi\times\dfrac{a^2}{4}=a \Leftrightarrow \pi a^2=4a \Leftrightarrow a(\pi a-4)=0$

or $a>0$ donc $a=\dfrac{4}{\pi}$

On a $0<\dfrac{4}{\pi}<1{,}4$ car $\dfrac{4}{\pi}=1{,}273$ à 10^{-3} près.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés