Exercice 2 3 points

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x)=e^{x-a}-2x+e^a$$

1. Montrer que pour tout réel a, la fonction f_a possède un minimum.

2. Existe-t-il un valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

CORRECTION

1. a est un nombre réel.

f_a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x)=e^{x-a}-2x+e^a$

f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$

$(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{x-a})'=e^{x-a}$

$f_a'(x)=e^{x-a}-2$

$f_a'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x-a}=2 \Leftrightarrow x-a=\ln(2) \Leftrightarrow x=a+\ln(2)$

$f_a'(x)>0 \Leftrightarrow e^{x-a}>0 \Leftrightarrow x-a>\ln(2) \Leftrightarrow x>a+\ln(2)$

On donne les variations sous la forme d'un tableau :

x	$-\infty$		a+ln2		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	0	$+$	
$f_a(x)$		↘	$f_a(a+ln2)$	↗	

Donc f_a admet un minimum pour $x=a+\ln(2)$.

Ce minimum est égal à $f_a(a+\ln(2))$.

$f_a(a+\ln(2))=e^{a+\ln(2)-a}-2(a+\ln(2))+e^a=e^{\ln(2)}-2a-2\ln(2)+e^a=e^a-2a+2-2\ln 2$

2. On considère la fonction g de la variable a définie sur $\mathbb{R}$ par $g(a)=e^a-2a+2-2\ln(2)$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(a)=e^a-2$

$e^a-2=0 \Leftrightarrow a=\ln(2)$

$g'(a)>0 \Leftrightarrow a=\ln(2)$

On les variations sousla forme d'un tableau

a	$-\infty$		ln2		$+\infty$
g'(a)		-	0	+	
g(a)		↘	g(ln2)	↗	

donc g admet un minimum pour $a=\ln(2)$ ce minimum est égal à $g(\ln(2))$

$g(\ln(2))=e^{\ln(2)}-2\ln(2)+2-2\ln(2)=4-4\ln(2)$

<u>Conclusion</u>

Le minimum de $f_a(x)$ est obtenu pour $a=\ln(2)$ et $x=2\ln(2)$ et ce minimun est égal à $4+4\ln(2)$.