Exercice 3 5 points

Soient x, y et z trois nombres réels. On considère les implications (P_1) et (P_2) suivantes :

$$(P_1) \quad (x+y+z=1) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}\right)$$

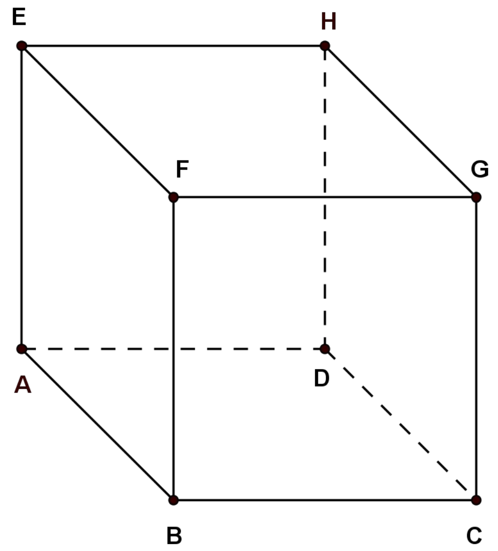
$$(P_2) \quad \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (x+y+z=1)$$

Partie A

L'implication (P_2) est-elle vraie ?

Partie B

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH, représenté ci-dessous, et on définit le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$.



1.a. Vérifier que le plan d'équation $x+y+z=1$ est le plan (BDE).

b. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

c. Montrer que l'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE) est le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

2. Le triangle BDE est-il équilatéral ?

3. Soit M un point de l'espace.

a. Démontrer que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 = AK^2 + MK^2$.

b. En déduire que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 \geqslant AK^2$

c. Soient x, y et z des réels quelconques. En appliquant le résultat de la question précédente au point M de coordonnées $(x ; y ; z)$, montrer que l'implication (P_1) est vraie.

CORRECTION

Partie A

Pour démontrer que la propriété (P_1) est fausse, il suffit de donner un contre exemple.

x=2 et y=z=0

$x^2+y^2+z^2=4\geqslant\frac{1}{3}$ et $x+y+z=2\neq1$

1.a. B, D et E sont trois points non alignés du plan (BDE).

Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

$B(1;0;0)$ $D(0;1;0)$ $E(0;0;1)$

$x_B+y_B+z_B=1$

$x_D+y_D+z_D=1$

$x_E+y_E+z_E=1$

Par trois points non alignés passent un plan unique donc une équation cartésienne du plan (BDE) est : $x+y+z=1$.

b. $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE).

La droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) si et seulement si $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$.

On a $G(1;1;1)$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AG}=(-1)\times1+1\times1+0\times1=-1+1=0$

$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AG}=(-1)\times1+0\times1+1\times1=-1+1=0$

<u>Conclusion</u>

(AG) est orthogonale au plan (BDE).

c. (AG) est la droite passant par A et de vecteur directeur : $\overline{AG}$.

On obtient pour représentation paramétrique de (AG) : $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection K de (AG) et (BDE), on résout le système :

$\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\\x+y+z=1\end{cases}$.

On obtient 3t=1 et $t=\frac{1}{3}$ et $x=y=z=\frac{1}{3}$ $K(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$

2. BD, BE et DE sont des diagonales des faces du cube donc $BD=BE=DE=\sqrt{2}$ donc letriangle BDE est équilatéral.

3.a. Pour tout point M du plan (BDE) différent de K, les droites (MK) et (AG) sont perpendiculai- res (la droite (AG) est orthogonale à toute droite contenue dans le plan (BDE)) donc le triangle MKA est rectangle en K.

On applique le théorème de Pythagore.

$AM^2=AK^2+MK^2$.

Si K=M alors AM=AK et MK=0.

On a aussi $AM^2=AK^2+MK^2$.

b. Pour tout point M du plan (BDE) $MK^2\geqslant0$ donc $AM^2\geqslant AK^2$.

$M(x;y;z)$ et $x+y+z=1$ car M appartient au plan (BDE).

$AM^2=(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=x^2+y^2+z^2$

$K\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

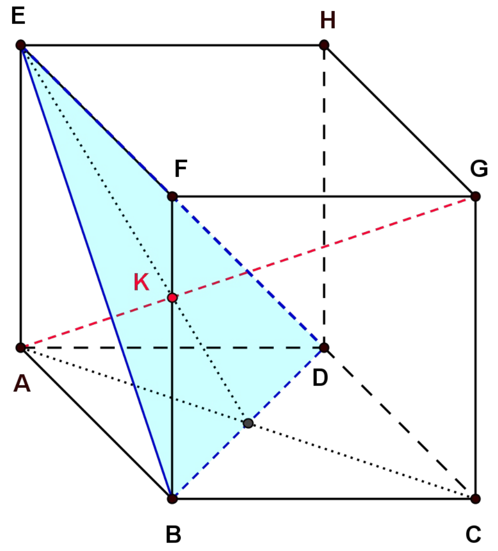
$$AK^2=\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-0\right)^2=3\times\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$$

Conclusion

$x+y+z=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$ et la propriété (P_1) est vraie.

Remarque

On joint une figure non demandée.



Le plan (ACGE) est le plan médiateur de [BD].

L'intersection des plans (ACGE) et (BDE) est (h) la hauteur (ou médiatrice . . .) du triangle BDE issue de E.

Le point d'intersection K de (AC) et (BDE) est le point d'intersection de (h) et (AG).