Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0=300$ et $a_0=450$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n+100 \\ a_{n+1}=\frac{1}{2}d_n+\frac{1}{2}a_n+70 \end{cases}$$

1. Calculer d_1 et a_1.

2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
L'algorithme suivant est proposé :

Variables : n et k sont des entiers naturels
D et A sont des réels
Initialisation : D prend la valeur 300
A prend la valeur 450
Saisir la valeur de n
Traitement : Pour k variant de 1 à n
D prend la valeur $\frac{D}{2}+100$
A prend la valeur $\frac{A}{2}+\frac{D}{2}+70$
Fin Pour
Sortie : Afficher D
Afficher A

a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour n=1 ?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question 1 ?
b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3.a. Pour tout entier naturel n, on pose $e_n=d_n-200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.
b. En déduire l'expression de (d_n) en fonction de n.
c. La suite (d_n) est-elle convergente?Justifier.

4. On admet que pour tout entier naturel n : $a_n=100n\left(\frac{1}{2}\right)^n+110\left(\frac{1}{2}\right)^n+340$

a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2\geqslant(n+1)^2$
b. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a $2^n\geqslant n^2$
c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $0\leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant\frac{100}{n}$

d. Etudier la convergence de la suite (a_n).

CORRECTION

On considère les deux suites de nombres réels définies par : $d_0=300$ et $a_0=450$ et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n+100 \\ a_{n+1}=\frac{1}{2}d_n+\frac{1}{2}a_n+70 \end{cases}$

1. Pour n=0

$d_1=\frac{1}{2}d_0+100=\frac{1}{2}\times 300+100 = \underline{\mathbf{250}}$

$a_1=\frac{1}{2}d_0+\frac{1}{2}a_0+70=\frac{1}{2}\times 300+\frac{1}{2}\times 450+70 = \underline{\mathbf{445}}$

2.a. Pour n=1

D prend la valeur : $\frac{300}{2}+100 = \underline{\mathbf{250}}$

A prend la valeur : $\frac{450}{2}+\frac{250}{2}+70 = \underline{\mathbf{420}}$

b. On obtient bien la valeur d_1 et on obtient pasla valeur a_1, car pour calculer A on utilise la valeur de D déterminée par l'instruction précédente et non la valeur de début de boucle. Pour corriger cette erreur, il suffit d'utiliser une variable supplémentaire que l'on notera B.

Variables : n et k sont des entiers naturels
D, A et **B** sont des réels
Initialisation : D prend la valeur 300
A prend la valeur 450
Saisir la valeur de n
Traitement : Pour k variant de 1 à n
B prend la valeur D
D prend la valeur $\frac{B}{2}+100$
A prend la valeur $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+70$
Fin Pour
Sortie : Afficher D
Afficher A

3.a. Pour tout entier naturel n

$e_n=d_n-200$ (donc $d_n=e_n+200$)

$e_{n+1}=d_{n+1}-200=\frac{1}{2}d_n+100-200=\frac{1}{2}(e_n+200)-100=\frac{1}{2}e_n$

(e_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme : $e_0=d_0-200=300-200=100$

b. Pour tout entier naturel n

$e_n=e_0\times q^n=100\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$d_n=e_n+200=100\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+200$

c. $0<\frac{1}{2}<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

donc (d_n) est une suite convergente et $\lim_{n\to+\infty} d_n = 200$.

4. On admet que pour tout entier naturel n

$a_n=100n\left(\frac{1}{2}\right)^n+110\left(\frac{1}{2}\right)^n+340$

a. $2n^2\geqslant(n+1)^2\Leftrightarrow n^2-2n-1\geqslant 0$

On considère le trinôme : $T(x)=x^2-2x-1$

$\Delta=4+4=8=(2\sqrt{2})^2$

$x'=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

$x''=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}=2{,}41$ à 10^{-2} près

On donne le signe de T(x) sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
T(x)		+	0	−	0	+	

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]1+\sqrt{2};+\infty[$ ona $T(x)>0$.

Donc pour tout entier naturel $n\geqslant 3$ on a $n^2-2n-1\geqslant 0$ soit $2n^2\geqslant(n+1)^2$

b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à4, on a : $2^n\geqslant n^2$.

. <u>Initialisation</u>

Pour $n=4$ $2^n=2^4=16$ et $4^2=16$

La propriété est vérifiée pour $n=4$

. <u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on suppose : $2^n\geqslant n^2$ et on doit démontrer que : $2^{n+1}\geqslant(n+1)^2$

Or en multipliant les deux membres de l'inégalité : $2^n\geqslant n^2$ par 2 on obtient $2\times 2^n\geqslant 2n^2$ soit $2^{n+1}\geqslant 2n^2$ et $n\geqslant 4$ donc le résultat précédent nous permet d'affirmer que : $2^{n+1}\geqslant(n+1)^2$.

<u>Conséquence</u>

$2^{n+1}\geqslant(n+1)^2$

. <u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 4 on a : $2^n\geqslant n^2$

c. Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 4 on a : $0<n^2\leqslant 2^n$, la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc $\frac{1}{n^2}\geqslant\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On obtient : $0\leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant 100n\times\frac{1}{n^2}=\frac{100}{n}$

(en multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par 100n)

d. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{100}{n}=0$, le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(100n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=0$

On a aussi $\lim\limits_{x\to n:+\infty}\left(110\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=0.$

<u>Conséquence</u>

(a_n) est une suite convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=240.$