Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un organisme propose un apprentissage de langues étrangères en ligne. Deux niveaux sont présentés: débutant ou avancé. Au début de chaque mois, un internaute peut s'inscrire, se déinscrire ou changer de niveau.
On souhaaite étudier l'évolution sur le long terme, de la fréquentation du site à partir d'un mois noté 0.
Des relevés de la fréquentation du site ont conduit aux observations suivantes :
. Au début du mois 0, il y avait 300 internautes au niveau débutant et 450 au niveau avancé.
. Chaque mois, la moitié des débutants passe au niveau avancé, l'autre moitié reste au niveau débutant et la moitié des avancés ayant terminé leur formation, se déinscrit du site.
. Chaque mois, 100 nouveaux internautes s'inscrivent en débutant et 70 en avancé.
On modélise cette situation par deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n). Pour tout entier naturel n, d_n et a_n sont respectivement des approximations du nombre de débutants et du nombre d'avan- cés au début du mois n.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

On pose $d_0=300$ et $a_0=450$ et pour tout entier naturel n

$$\begin{cases} d_{n+1}= \frac{1}{2}d_n+100 \\ a_{n+1}=\frac{1}{2}d_n+\frac{1}{2}a_n+70 \end{cases}$$

1.a. Justifier l'égalité $a_{n+1}=\frac{1}{2}d_n+\frac{1}{2}a_n+70$ dans le contexe de l'exercice

b. Déterminer les matrices A et B telles que pour tout entier naturel n,
$$U_{n+1}=AU_n+B$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$
$$A^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(I_2+nT) \quad \text{où} \quad T=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.a. Déterminer la matrice C qui vérifie l'égalité $C=AC+B$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n=U_n-\begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1}=AV_n$.

c. On admet que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$
$$U_n=\begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100\,n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}$$

4.a. On admet que pour tout entier $n\geqslant 4$, $2^n\geqslant n^2$.
En déduire que pour tout entier $n\geqslant 4$
$$0\leqslant 100\,n\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant\frac{100}{n}$$

b. En utilisant les questions précédentes, que peut-on prévoir pour l'évolution de la fréquentation du site sur le long terme ?

CORRECTION

1.a. Au début du mois n :

d_n est le nombre de débutants.
a_n est le nombre d'avancés.
Au début du mois $n+1$
d_{n+1} est le nombre de débutants.
a_{n+1} Est le nombre d'avancés.
L'énoncé précise que « chaque mois, la moitié des débutants passe au niveau avancé et la moitié des avancés ayant terminé leur formation se désinscrit du site » et « chaque mois 70 nouveaux internau- tes s'inscrivent en avancé ».
Conséquence
Pour le mois $n+1$
La moitié des débutants passe au niveau avancé soit : $\frac{d_n}{2}$.
La moitié des avancés reste au niveau avancé soit : $\frac{a_n}{2}$.
Et 70 nouveaux inscrits au niveau avancé, donc :
$a_{n+1}=\frac{d_n}{2}+\frac{a_n}{2}+70$.

b. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n+100 \\ a_{n+1}=\frac{1}{2}d_n+\frac{1}{2}a_n+70 \end{cases}$$

En utilisant la notation matricielle

$$\begin{pmatrix} d_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$U_n=\begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix} \; ; \; U_{n+1}=\begin{pmatrix} d_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \; ; \; A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \; ; \; B=\begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix}$$

et on a $U_{n+1}=AU_n+B$

c. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel, non nul : $A^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(I_2+nT)$

avec $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Initialisation

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

or $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=I_2+T$

et $A=\frac{1}{2}(I_2+T)$

soit $A^1=\left(\frac{1}{2}\right)^1(I_2+1\times T)$

La propriétéest donc vérifiée pour $n=1$.

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que $A^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(I_2+nT)$ et on démontrer que $A^{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(I_2+(n+1)T)$.

Or $A^{n+1}=A^n\times A^1=[\left(\frac{1}{2}\right)^n(I_2+nT)]\times[\left(\frac{1}{2}\right)(I_2+T)]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{1}{2}\right)\right][(I_2+nT)(I_2+T)]$

$A^{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(I_2\times I_2+nT\times I_2+I_2\times T+nT\times T)$

On peut vérifier avec la calculatrice que :

$I_2\times I_2=I_2$; $T\times I_2=I_2\times T=T$; $T\times T=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$A^{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(I_2+nT+T)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(I_2+(n+1)T)$

<u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n : on a $A^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(I_2+nT)$

3.a. $C=AC+B\Leftrightarrow C-AC=B\Leftrightarrow I_2\times C-A\times C=B\Leftrightarrow(I_2-A)\times C=B$

$I_2-A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

On détermine avec la calculatrice l'inverse de la matrice : I_2-A on obtient $(I_2-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$.

$C=AC+B\Leftrightarrow C=(I_2-A)^{-1}\times B \quad\Leftrightarrow\quad C=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\70\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\\340\end{pmatrix}$

b. Pour tout entier naturel n :

$V_n=U_n-\begin{pmatrix}200\\340\end{pmatrix}=U_n-C$

$V_{n+1}=U_{n+1}-C=AU_n+B-(AC+B)=AU_n-AC=A(U_n-C)=AV_n$

c. On admet que pour tout entier naturel non nul n, on a : $V_n=A^nV_0$

$V_0=U_0-C=\begin{pmatrix}300\\450\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}200\\340\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\110\end{pmatrix}$

Or $A^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(I_2+nT)=\left(\frac{1}{2}\right)^n[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}]=\left(\frac{1}{2}\right)^n[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\n&0\end{pmatrix}]$

$A^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$

$$V_n = A^n V_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 100 \\ 100n + 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$U_n = V_n + C = \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

4.a. On admet que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 4, $2^n \geqslant n^2$.

La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc $0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$.

En multipliant les membres de la double inégalité par $100n > 0$

$$0 < 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{n^2} \times 100n = \frac{100}{n}$$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{100}{n} = 0$

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

D'autre part :

$0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 110\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Conséquence

$\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = 200$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 340$.

Dans un avenir lointain, le nombre de débutants sera voisin de 200 et le nombre d'avancés sera voisin de 340.