Exercice 1 6 points

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :
$$f_n(x)=x^2e^{-2nx}.$$
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$

Partie A : Etude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=x^2e^{-2x}$

On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.

a. Justifier que pour tout réel x, $f_1'(x)=2xe^{-2x}(1-x)$.

b. Etudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.

d. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x)=\left(\dfrac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par : $F_1(x)=-e^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\right)$.

En déduire la valeur de I_1.

Partie B : Etude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.

a. Interpréter graphiquement la quantité I_n.

b. Emettre alors une conjecture sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite (I_n).
Expliciter la démarche qui à mener à cette conjecture.

2.a. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0;1]$,
$$f_{n+1}(x)=e^{-2x}f_n(x)$$

b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0;1]$,
$$f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$$

c. Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).

3. Soit n un entier naturel non nul.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0;1]$,
$$0\leqslant f_n(x)\leqslant e^{-2nx}$$

b. En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.

CORRECTION

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f_n(x)=x^2 e^{-2nx}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

Partie A

1. $f_1(x)=x^2e^{-2x}$

a. $u(x)=x^2$ $u'(x)=2x$
$v(x)=e^{-2x}$ $v'(x)=-2xe^{-2x}$
$f_1'(x)=2xe^{-2x}-2x^2e^{-2x}=(2x-2x^2)e^{-2x}=2x(1-x)e^{-2x}$

b. Pour tout nombre réel x : $e^{-2x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $x(1-x)$ (signe d'un trinôme dont les racines sont 0 et 1).
On donne les solutions sous la forme d'un tableau (on obtient le tableau de variations de f_1 en utilisant les résultats des questions suivantes pour les limites).

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{e^2}$	↘	0

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=+\infty$

d. $f_1(x)=x^2e^{-2x}=\frac{x^2}{e^{2x}}=\frac{x^2}{(e^x)^2}=\left(\frac{x}{e^x}\right)^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=0$.

2. Pour tout nombre réel x : $F_1(x)=e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)$

F_1 est une primitive de f_1

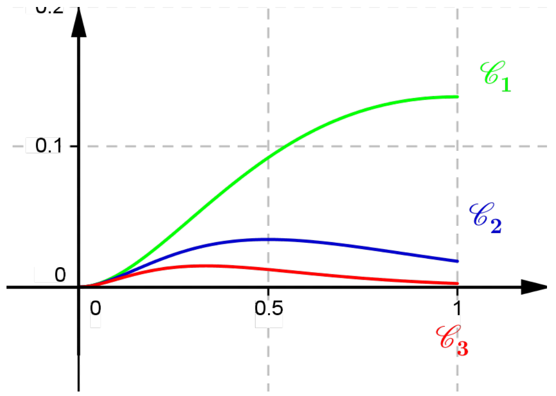
$\int_0^1 f_1(x)dx=F_1(1)-F_1(0)=-e^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}e^{-2}$

Partie B : Etude de la suite (I_n)

1. n est un entier naturel non nul.

a. La fonction f_n est continue et positive sur [0;1] donc I_n est l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

b. En utilisant la calculatrice, on trace des courbes $\mathscr{C}_n$ sur l'intervalle [0;1] : $\mathscr{C}_1$; $\mathscr{C}_2$; $\mathscr{C}_3$



En considérant les aires ous les courbes, on peut conjecturer que (I_n) est décroissante et que $\lim_{x\to+\infty} I_n = 0$.

2.a. Pour tout entier naturel n non nul,et tout nombre réel x appartenant à [0;1] :

$f_n(x)=x^2e^{-2nx}$ $\quad\quad f_{n+1}(x)=x^2e^{-2(n+1)x}$

$f_{n+1}(x)=x^2e^{-2nx-2x}=x^2e^{-2nx}\times e^{-2x}=f_n(x)\times e^{-2x}$

b. $f_n(x)-f_{n+1}(x)=(1-e^{-2x})f_n(x)$.

Or $f_n(x)\geqslant 0$ sur [0;1].

Si $0\leqslant x\leqslant 1$ alors $0\geqslant -2x\geqslant -2$

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$

donc $e^0\geqslant e^{-2x}\geqslant e^{-2}$ or $e^0=1$

et $1-e^{-2x}\geqslant 0$

<u>Conséquence</u>

$f_n(x)-f_{n+1}(x)\geqslant 0$ soit $f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$

c. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0;1] et pour tout entier naturel n non nul :

$f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$ et 0 < 1 donc $\int_0^1 f_{n+1}(x)dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)dx$

Soit $I_{n+1}\leqslant I_n$ donc la suite (I_n) est décroissante.

3.a. Si $0\leqslant x\leqslant 1$ alors $0\leqslant x^2\leqslant 1$ (car la fonction carré est croissante sur [0;1])

et $0\leqslant x^2e^{-2nx}\leqslant e^{-2nx}$

b. on obtient $\int_0^1 0\,dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)dx \leqslant \int_0^1 e^{-2nx}dx$

$g_n(x)=e^{-2nx}$ $\quad G_n(x)=-\dfrac{1}{2n}e^{-2nx}$

G_n est une primitive de g_n sur [0;1]

$$\int_0^1 e^{-2nx}dx=G_n(1)-G_n(0)=-\frac{e^{-2n}}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1-e^{-2n}}{2n}$$

On obtient pour encadrement de I_n

$$0\leqslant I_n\leqslant\frac{1-e^{-2n}}{2n}=\frac{1}{2n}-\frac{e^{-2n}}{2n}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2ne^{2n}}$$

$\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}=0$; $\lim_{n\to+\infty} 2ne^{2n}=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2ne^{2n}}=0$.

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que : $\lim_{n\to+\infty} I_n = \mathbf{0}$.

