Exercice 2 *5 points*

Dans un supermarché, on réalise une étud sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période de un mois.
. 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
. 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle [0;1].
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse.
On définit les événements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus »

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du super marché fait une étude sur un lot de 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles p résentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe . Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentes moins de 2 % de pulpe.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la propottion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.

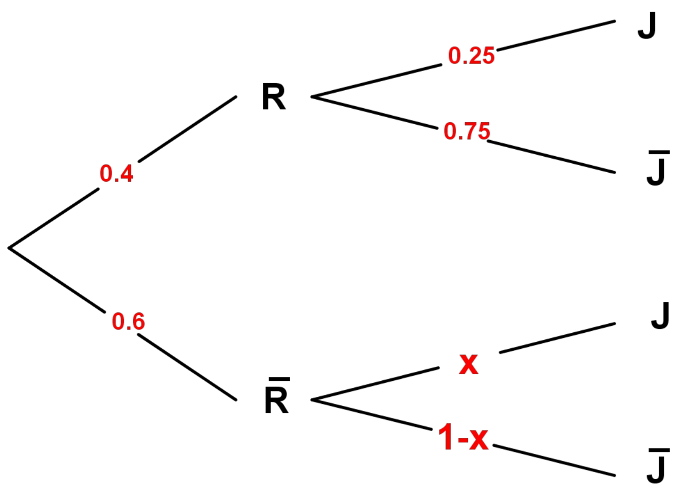
2. Que penser de l'affirmation du fournisseur ?

CORRECTION

Partie A

L'énoncé précise :
« 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange »
donc $P(R)=0{,}4$ et $P(\bar{R})=1-P(R)=1-0{,}4=0{,}6$.
« 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation:**pur jus** »
donc $P_R(J)=0{,}25$ et $P_R(\bar{J})=1-P_R(J)=1-0{,}25=0{,}75$
de plus $P_{\bar{R}}(J)=x$ et $P_{\bar{R}}(\bar{J})=1-x$.
Nous savons aussi que $P(J)=0{,}2$

1. On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales :
$P(J)=P(R\cap J)+P(\bar{R}\cap J)$
$P(J)=0{,}4\times 0{,}25+0{,}6\times x=0{,}1+0{,}6\,x$
Or $P(J)=0{,}2$ donc $0{,}2=0{,}1+0{,}6\,x$
$x=\frac{0{,}1}{0{,}6}=\frac{1}{6}$.

3. On doit calculer : $P_J(R)$
$P_J(R)=\frac{P(J\cap R)}{P(J)}=\frac{0{,}1}{0{,}2}=$ **0,5.**

Partie B

1. On considère l'épreuve de Bernoulli :
On choisir au hasard une bouteille de jus de fruits vendue
succès S « cette bouteille est **pur jus** » $P(S)=0{,}2$
échec $\bar{S}$ « cette bouteille n'est pas **pur jus** » $P(\bar{S})=1-P(S)=1-0{,}2=0{,}8$.
On choisit alors un échantillon de 500 bouteilles (le stock étant important, on suppose que l'on effectue des tirages avec remise donc indépendants).
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 500 épreuves.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=500$ et $p=0{,}2$.

2. On nous demande de calculer $P(75 \leqslant X)$
En utilisant la calculatrice on obtient 0,9984.
$P(75 \leqslant X) =$ **0,998.**

Partie C

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :
$$I=\left[p-1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p+1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$
$n=900\geqslant 30$; $np=900\times 0{,}9=810\geqslant 5$; $n(1-p)=900\times 0{,}1=90\geqslant 5$
$$I=\left[0{,}9-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}9\times 0{,}1}{900}}\,;0{,}9+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}9\times 0{,}1}{900}}\right]$$
$1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}9\times 0{,}1}{900}}=1{,}96\times 0{,}01=0{,}0196=0{,}02$ à 10^{-3} près.
$I=[0{,}9-0{,}02\,;0{,}9+0{,}02]=[0{,}88\,;0{,}92]$

2. La proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe dans l'échantillon de 900 bouteilles est : $f=\frac{766}{900}=0{,}851$ à 10^{-3} près.
f N'appartient pas à I.
Au seuil de 95 %, l'affirmation du fournisseur est fausse.