Exercice 3 4 points

Les trois questions sont indépendantes.
Toute réponse doit être justifiée.

1. On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par :
$u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $\ln(u_{n+1})=\ln(u_n)-1$
La suite (u_n) est-elle géométrique ?

2. Soit (v_n) une suite à termes strictement positifs.
On définit la suite (w_n) par, pour tout entier naturel n, $w_n=1-\ln(v_n)-1$
La proposition ($\mathscr{P}$) suivante est-elle vraie ou fausse ?
($\mathscr{P}$) : si la suite (v_n) est majorée alors la suite (w_n) est majorée.

3. La suite (z_n) de nombre complexes est définie par :
$z_0=2+3\,i$ et, pour tout entier naturel n par $z_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}}{4}\right)z_n$;
Pour quelles valeurs de n, $|z_n|$ est-il inférieur ou égal à 10^{-20} ?

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. (u_n) est la suite de nombres réels strictement positifs tele que : $u_0=1$ et pour tout entier naurel n : $\ln(u_{n+1})=\ln(u_n)-1$.

Or $-1=-\ln(e)=\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

donc $\ln(u_{n+1})=\ln(u_n)+\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\left(\frac{1}{e}\times u_n\right)$ et $u_{n+1}=\frac{1}{e}\times u_n$

Conclusion

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$.

Remarque

Pour tout entier naturel n :

$u_n=q^n u_0=\left(\frac{1}{e}\right)^n\times 1=\left(\frac{1}{e}\right)^n$

donc (u_n) est bien une suite de termes strictement positifs.

2. Pour démontrer que la proposition ($\mathscr{P}$) est fausse , il suffit de trouver un contre exemple c'est à dire de trouver une suite (v_n) de termes strictement positifs et majorée telle que la suite (w_n) ne soit pas majorée.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=\frac{1}{n+1}$;

Cette suite est majorée par 1 et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Pour tout entier naturel n :

$w_n=1-\ln(v_n)=1-\ln\left(\frac{1}{n+1}\right)=1+\ln(n+1)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$

On obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=+\infty$ et la suite (w_n) n'est pas majorée.

3. $z_0=2+3i$ et pour tout entier naturel n $z_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}}{4}\right)z_n$

(z_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme $z_0=2+3i$ et de raison $q=\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}}{4}$

donc $z_n=q^n z_0=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^n\times(2+3i)$

$|z_n|=|\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}}{4}|^n$ x|2+3i|

|2+3i|= $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$\left|\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}}{4}\right|=\sqrt{\frac{2}{16}+\frac{6}{16}}=\sqrt{\frac{8}{16}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc pour tout entier naturel n :

$|z_n|=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\times\sqrt{13}$

$|z_n|\leqslant 10^{-20}\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+\sqrt{13}\leqslant 10^{-20}\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\leqslant\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}$

La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leqslant \ln\left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\right) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leqslant \ln\left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\right)$

$0 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

En utilisant la calculatrice

$\Leftrightarrow n \geqslant 136{,}57$

n est un entier naturel donc $n \geqslant 137$

<u>Conclusion</u>

$|z_n| \leqslant 10^{-20}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 137.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés