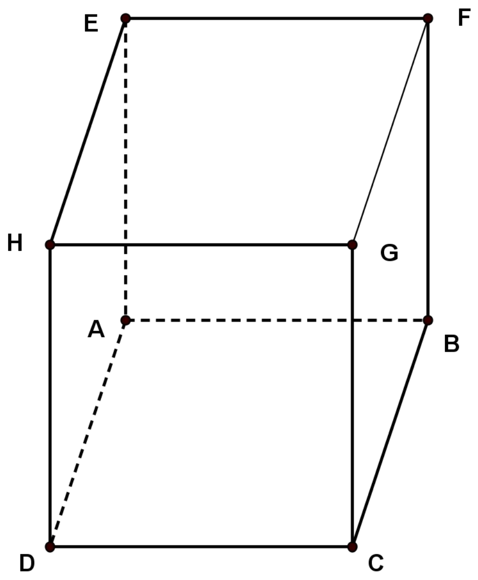
Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Soit ABCDEFGH le cube ci-dessous



On se place dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$.

1.a. Montrer que la droite (DB) admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1-s \\ z = 0 \end{cases}$$ où s décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

b. Montrer que les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées $(t;t;t)$ oùt est un réel

2. Soit M un point de la droite (DB) et N un poinr quelconque de la droite (AG).
Démontrer que la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (DB) si et seulement si
M et N ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ et $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

3. Soit s et t deux réels quelconques.
On note $M(s;1-s;0)$ un point de la droite (DB) et $N(t;t;t)$ un point dela droite (AG).

a. Montrer que $MN^2 = 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$

b. En déduire la position des points M et N pour laquelle la distance MN est minimale.
Que peut-on dire de la droite (MN) dans ce cas ?

CORRECTION

On écrit les coordonnées des sommets du cube dans le repère orthonormé (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$).
$A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $C(1;1;0)$; $D(0;1;0)$; $E(0;0;1)$; $F(1;0;1)$; $G(1;1;1)$; $H(0;1;1)$;

1.a. M appartient à la droite (DB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires c'est à dire si et seulement s'il existe un réel s tel que $\overrightarrow{DM} = s.\overrightarrow{DB}$.
$D(0;1;0)$; $M(x;y;z)$ et $B(1;0;0)$

$\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On obtient pour représentation paramétrique

$$\overrightarrow{DM} = s.\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y-1=-s \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y=1-s \\ z= 0 \end{cases} \quad s \text{ décrit } \mathbb{R}$$

b. N appartient à la droite (AG) si et seulement s'il un réel t tel que $\overrightarrow{AN} = t.\overrightarrow{AG}$
$N(x;y;z)$; $A(0;0;0)$; $G(1;1;1)$

$\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AN} = t.\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

2. M appartient à (DB) donc $M(s;1-s;0)$
N appartient à (AG) donc $N(t;t;t)$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} t-s \\ t+s-1 \\ t \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(MN) est perpendiculaire à (DB) et (AG) si et seulement si $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{DB} = 0$ et $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{AG} = 0$
Le repère est orthonormé

$\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{DB} = (t-s)\times 1+(t+s-1)\times(-1)+t\times 0=t-s-t-s+1=-2s+1$

$\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow -2s+1=0 \Leftrightarrow s=\frac{1}{2}$ donc $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$

$\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{AG} = (t-s)\times 1+(t+s-1)\times 1+t\times 1=t-s+t+s-1+t=3t-1$

$\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{AG} = 0 \Leftrightarrow 3t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$ donc $N\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

<u>Conclusion</u>

(MN) est perpendiculaire à (DB) et (AG) si et seulement si $N\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ et $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$

3.a. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} t-s \\ t+s-1 \\ t \end{pmatrix}$

Le repère est orthonormé

$MN^2=(t-s)^2+(t+s-1)^2+t^2$
$MN^2=t^2-2st+s^2+t^2+s^2+1^2+2st-2t-2s+t^2$
$MN^2=3t^2+2s^2-2t-2s+1$

$$MN^2=3\left(t^2-\frac{2}{3}t\right)+2(s^2-s)+1$$
$$MN^2=3\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{3}+2\left(s^2-s+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}+1$$
$$MN^2=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}$$

4. La distance MN est minimale si et seulement si le carré de MN est minimal si et seulement si $t-\frac{1}{3}=0$ et $s-\frac{1}{2}=0$ soit $t=\frac{1}{3}$ et $s=\frac{1}{2}$.

On obtient $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ et $N\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

(MN) est la perpendiculaire commune aux droites (non coplanaires) (AG) et (DB).