Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

On considère l'équation : $51x-26y=1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple solution.

2.a. Donner un couple solution $(x_0 ; y_0)$ de cette équation.
b. Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Partie B
On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction codage f par $f(x)=y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x+2$ par 26.
La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre de l'alphabet correspon- dant à l'entier y.

1. Coder la lettre N

2. En utilisant la partie A, déterminer l'entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $51a \equiv 1$ (26).

3. Démontrer que si la lettre correspondant à un entier x est codée par une lettre correspondant à un entier y, alors x est le reste de la division euclidienne de $ay+2$ par 26.

4. Déterminer alors la lettre codée par la lettre N.

5. On applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre x correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtienr-on ?

CORRECTION

Partie A

1. Les entiers naturels 51 et 26 sont premiers entre eux.
On peut utiliser l'algorithme d'Euclide pour le vérifier.

	1	1	25
51	26	25	1
25	1	0	

Le dernier reste non nnul est **1**.

Théorème de Bezout

Deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs x et y tels que ax – by = 1.

Conséquence

51 et 26 sont premiers entre eux donc l'équation 51x – 26y = 1 admet au moins un couple solution.

2.a. En utilisant les résultats de l'algorithme d'euclide

$51=1\times 26+25 \qquad 25=51-1\times 26$

$26=1\times 25+1 \qquad 1=26-1\times 25$

$1=26-1\times(51-1\times 26)=2\times 26-51$

donc $(-1)\times 51-(-2)\times 26=1$

Le couple $(-1;-2)$ est une solution de l'équation : 51x – 26y = 1.

On obtient $x_0=-1$ et $y_0=-2$

b. On a $51x_0-26y_0=1$

$51x-26y=1 \Leftrightarrow 51x-26y=51x_0-26y_0 \Leftrightarrow 51(x-x_0)=26(y-y_0) \Leftrightarrow 51\times(x+1)=26(y+2)$

51 divise $26\times(y+2)$ et 51 est premier avec 26 donc le **théorème de Gauss** nous permet d'affirmer que 51 divise (y+2).

Il existe un entier relatif k tel que $y+2=\mathrm{k}\times 51$ et $51\times(x+1)=26\times(y+2)=26\times\mathrm{k}\times 51$.

Conséquence : $x+1=26\times\mathrm{k}$

Vérification

Pour tout entier relatif k, si $(x+1)=26\times\mathrm{k}$ et $y+2=51\mathrm{k}$ alors $51(x+1)=51\times 26\mathrm{k}$ et $51(x+1)=26\times(51\mathrm{k})=26(x+2)$.

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation 51x – 26y = 1 est l'ensemble des couples $(x;y)$ tels que $x+1=26\mathrm{k}$ et $y+2=51\mathrm{k}$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers rellatifs.

$$\begin{cases} x=26\mathrm{k}-1 \\ y=51\mathrm{k}-2 \end{cases} \quad \mathrm{k}\in\mathbb{Z}$$

Partie B

1. A la lettre N correspond le nombre x=13

$51x+2=51\times 13+2=665$

On effectue la division euclidienne de 665 par 26

$665=26\times 25+15$

donc f(13)=15

Au nombre 15 correspond la lettre P.

Conclusion
La lettre N est codée par la lettre P.

2. On détermine **le** couple solution $(x;y)$ de l'équation $51x-26y=1$ tel que : $0\leqslant x\leqslant 25$.
Il suffit de donner à k la valeur 1 alors x=25 et y=49.
$25\times 51-49\times 26=1$
$49x26\equiv 0 \quad (26)$ et $25x51\equiv 1 \quad (26)$
donc **a=25.**

3. $0\leqslant x\leqslant 25$ (x est un entier naturel)
$f(x)=y$ y est le reste de la division euclidienne de 51x+2 par 26
c'est à dire $0\leqslant x\leqslant 25$ et $y\equiv 51x+2 \quad (26)$
$a.y\equiv a.51x+2.a \quad (26)$ or a=25
$25y\equiv 25.51x+50 \quad (26)$
Nous avons vu que : $25x51\equiv 1 \quad (26)$
donc $25y\equiv 1.x+50 \quad (26)$
et $x\equiv 25y-50 \quad (26)$
$-50=2\times 26+2$ $\quad -50\equiv 2 \quad (26)$
$x\equiv 25y+2 \quad (26)$ (avec a=25)
Conclusion
$0\leqslant x\leqslant 25$ et $25y+2\equiv x \quad (26)$
x est le reste de la division euclidienne de 25y+2 par 26.

4. A la lettre N correspond le nombre 13.
On veut déterminer la lettre qui est codée par N pour cela on doit déterminer x tel que f(x)=13 (=y).
$25\times 13=327$
$327=12\times 26+15$
donc x=15 et la lettre correspondante est P donc P est la lettre qui est codée par la lettre N.

5. Nous avons vu que $f[f(15)]=f(13)=15$
A-t-on le même résultat pour d'autres valeurs de x ?
$0\leqslant x\leqslant 25$
$f(x)=y$ y est le reste de la division euclidienne de 51x+2 par 26
($0\leqslant y\leqslant 25$ et $51x+2\equiv y \quad (26)$)
et nous savons que x est le reste de la division euclidienne de 25y+2 par 26.
($0\leqslant x\leqslant 25$ et $25y+2\equiv x \quad (26)$)
$f[f(x)]=f(y)=z$ z est le reste de la division euclidienne de 51y+2 par 26
($0\leqslant z\leqslant 25$ et $51y+2\equiv z \quad (26)$)
et nous savons que y est le reste de la division euclidienne de 25z+2 par 26
($0\leqslant y\leqslant 25$ et $25z+2\equiv y \quad (26)$)
On obtient :
$25(25z+2)+2\equiv x \quad (26)$
$625z+50+2\equiv x \quad (26)$
$625=24\times 26+1$ donc $625\equiv 1 \quad (26)$
$52=2\times 26$ donc $52\equiv 0 \quad (26)$
Conséquence
$z\equiv x \quad (26)$
Or $0\leqslant x\leqslant 25$ et $0\leqslant z\leqslant 25$
donc x=z.
On a $f[f(x)]=x$ (pour tout entier naturel x compris entre 0 et 25)
Si on applique 2 fois de suite la fonction codage pour une lettre quelconque on obtient pour lettre codée la même lettre.

On obtient le même résultat si on applique la fonction de codage un nombre pair de fois.

Conclusion

100 est un nombre pair donc si on applique 100 fois de suite la fonction de codage pour une lettre quelconque, on obtient pour lettre codée : la même lettre.