Exercice 2 — 7 points

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ telle que : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$. On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe, **à rendre avec la copie.**

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n=\int_0^n f(x)\,dx$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $e^x-x\geqslant\dfrac{e^x}{2}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n\leqslant\int_0^n 2xe^{-x}\,dx$.

b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ telle que : $H(x)=(-x-1)e^{-x}$.
Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n\leqslant 2$.

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont :
- K et i des entiers naturels, K étant non nul.
- A, x et h des réels.

Entrée	Saisir K entier naturel non nul
Initialisation	Affecter à A la valeur 0
	Affecter à x la valeur 0
	Affecter à h la valeur $\dfrac{1}{K}$
Traitement	Pour i variant de 1 à K
	Affecter à A la valeur $A+h\times f(x)$
	Affecter à x la valeur x+h
	Fin Pour
Sortie	Afficher A

1. Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour K=4.
Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

i	A	x
1		
2		
3		
4		

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

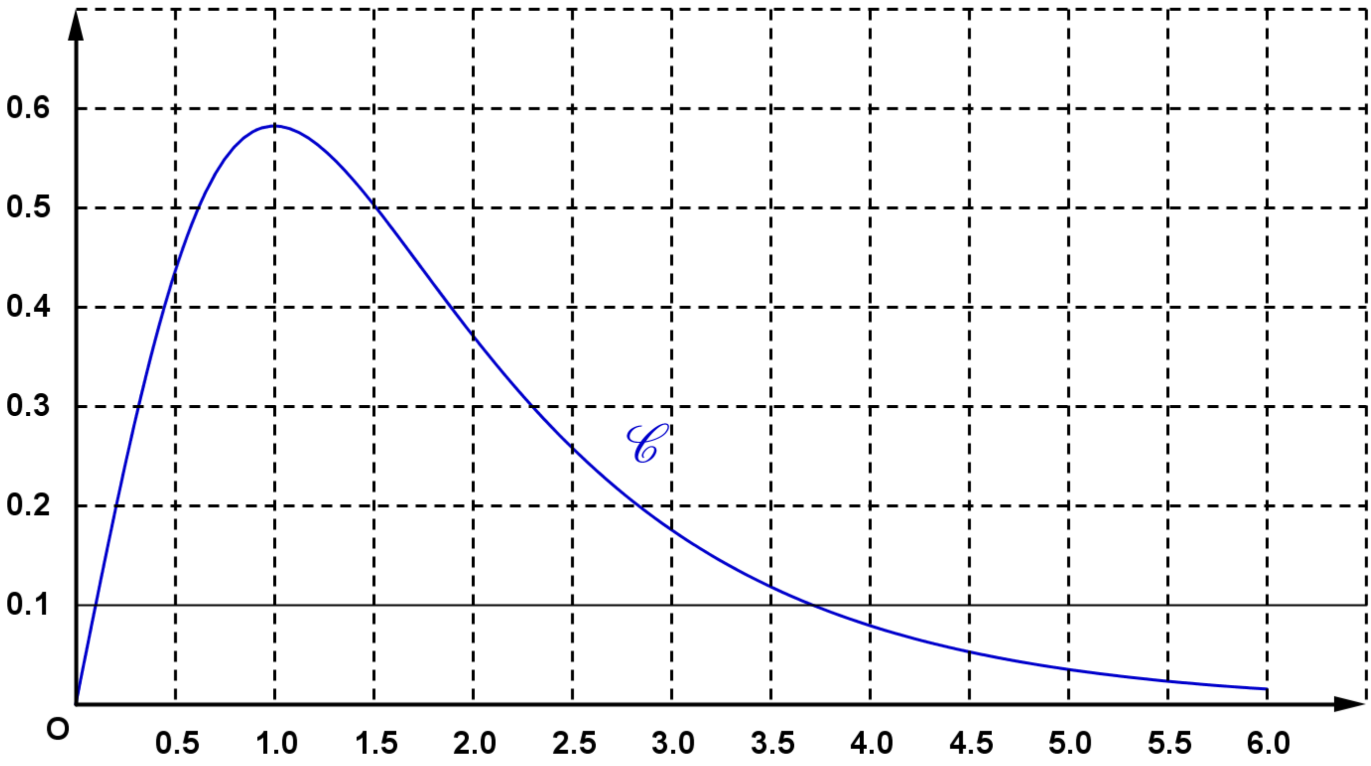
2. En l'illustrant sur l'annexe **à rendre avec la copie,** donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour K=8.

3. Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?

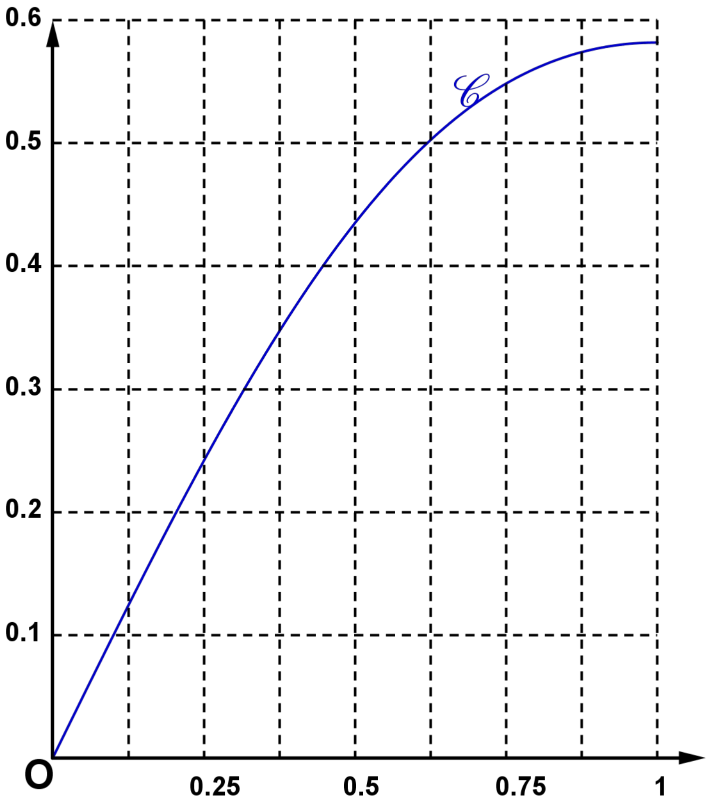
Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

ANNEXE EXERCICE 2
à rendre avec la copie

Courbe $\mathscr{C}$ représentation de la fonction f sur $[0;6]$.



Courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur $[0;1]$.



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Correction :

Partie A

Pour tout entier naturel n : $I_n = \int_0^n f(x)\,dx$

1. $I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} f(x)\,dx - \int_0^n f(x)\,dx = \int_0^{n+1} f(x)\,dx + \int_n^0 f(x)\,dx = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$

or, f est positive ou nulle sur $[0;+\infty[$ donc sur $[n;n+1]$: $\int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale).

Conclusion
(I_n) est **une suite croissante**.

2. On admet que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$: $e^x - x \geqslant \frac{e^x}{2} > 0$

a. La fonction inverse est **décroissante** sur $]0;+\infty[$ donc :
$\frac{1}{e^x - x} \leqslant \frac{2}{e^x}$ et $\frac{x}{e^x - x} \leqslant \frac{2x}{e^x} = 2xe^{-x}$

b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$:
$H(x) = (-x-1)e^{-x}$ et $(e^{-x})' = -e^{-x}$
donc $H'(x) = (-1)e^{-x} + (-x-1)(-e^{-x}) = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x} = \boxed{xe^{-x}}$

c. H est une **primitive** de la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = xe^{-x}$.
On a pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x) = \frac{x}{e^x - x} \leqslant 2xe^{-x} = 2h(x)$

donc pour tout entier naturel n :
$I_n = \int_0^n f(x)\,dx \leqslant 2\int_0^n h(x)\,dx$

or $\int_0^n h(x)\,dx = H(n) - H(0) = (-n-1)e^{-n} - (-1)e^0 = -(n+1)e^{-n} + 1$
Pour tout entier naturel n :
$I_n \leqslant 2 - 2(n+1)e^{-n}$
or, $2(n+1)e^{-n} > 0$
donc $\boxed{I_n \leqslant 2}$

3. (I_n) est une **suite majorée** (par 2) et **croissante** donc (I_n) est une **suite convergente**.

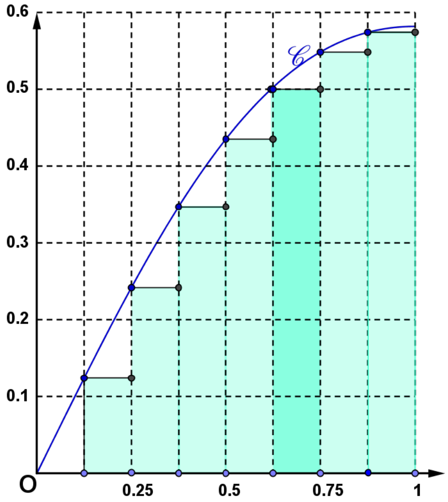
Partie B

1. En utilisant la calculatrice, on obtient :

i	A	x
1	0	0.25
2	0.060	0.50
3	0.169	0.75
4	0.306	1

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2.



Le résultat affiché est **l'aire en unité d'aire de la partie de plan colorée en bleu**.

Remarque
Pour représenter l'algorithme, ici on utilise un tableur.
$K=8$ Donc $\frac{1}{K}=0{,}125$

On écrit :
En A1 : 0 En B1 : 0 En C1 : 0
En A2 : =A1+1 En B2 : =B1+0,125*(C1/(exp(C1)-C1)) En C2 : =C1+0,125
On étire jusque A9 , B9 et C9

	A	B	C
1	0	0	0
2	1	0	0.125
3	2	0.0155	0.25
4	3	0.04572	0.375
5	4	0.08912	0.5
6	5	0.14353	0.625
7	6	0.20637	0.75
8	7	0.27495	0.875
9	8	0.34673	1

On obtient A en B9.

3. Lorsque K devient grand, A est valeur approchée « assez précise » de **l'aire** de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Remarques

. On a admis que la fonction f est positive ou nulle sur $[0;+\infty[$ donc on a admis que pour tout nombre réel x de $[0;+\infty[$, $e^x-x>0$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Rappel

La tangente à la courbe représentative d'exponentielle au point d'abscisse 0 est la droite (T) d'équation : $y=x+1$.

On vérifie que la courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de la droite (T). Pour cela, on étudie le signe de $g(x)=e^x-x-1$ sur $[0;+\infty[$.

On a : $g'(x)=e^x-1=e^x-e^0$

$x\geqslant 0$ donc $e^x\geqslant e^0=1$ donc g' est positive ou nulle sur $[0:+\infty[$.

x	0		+∞
g'(x)	0	+	
g(x)	0	↗	
signe de g(x)	0	+	

Conséquence

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ on a : $e^x-x-1\geqslant 0$ donc $\boxed{e^x-x\geqslant 1>0}$.

. On a admis que : $e^x-x\geqslant\frac{e^x}{2}$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$.

Soit $e^x-\frac{e^x}{2}-x\geqslant 0$ ou $\frac{e^x}{2}-x\geqslant 0$.

On pose $d(x)=\frac{e^x}{2}-x$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$.

$d'(x)=e^x-1$

$d'(x)=0\Leftrightarrow\frac{e^x}{2}-1\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln 2$

$d'(x)>0\Leftrightarrow x>\ln 2$

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

x	0		ln2		+∞
d'(x)		−	0	+	
d(x)		↘	1-ln2	↗	

$d(\ln 2)=\frac{e^{\ln 2}}{2}-\ln 2=\frac{2}{2}-\ln 2=1-\ln 2>0$

<u>Conséquence</u>

$d(x)>0$ donc $\boxed{e^x-x\geqslant\frac{e^x}{2}}$.

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés