Exercice 3 — Candidats n'ayant pas suivi la spécialité — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

. les points $A(0;1;-1)$ et $B(-2;2;-1)$.

. la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+t \\ z=-1-t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2.a. Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.
b. Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécantes.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathscr{D}$ de coordonnées $(-2+u;1+u;-1-u)$

3. Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+y-z-3u=0$ est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$ et passe par le point M.

4. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4+6u;3-3u;-1)$.

5.a. Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$.
b. Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB).

6.a. Exprimer MN^2 en fonction de u.
b. En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.

Correction :

1. $A(0;1;-1)$ et $B(-2:2:-1)$

(AB) est **une droite** passant par **A** et de **vecteur directeur** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

On obtient pour représentation paramétrique pour la droite (AB) : $\begin{cases} x=0-2k \\ y=1+k \\ z=-1+0k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$.

2.a. $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de $\mathcal{D}$.

Les vecteurs $\vec{V}$ et $\overrightarrow{AB}$ **ne sont pas colinéaires** donc les droites (AB) et $\mathcal{D}$ **ne sont pas parallèles**.

b. Pour déterminer l'intersection des droites (AB) et $\mathcal{D}$, on résout le système :

$$\begin{cases} -2+t=0-2k \\ 1+t=1+k \\ -1-t=-1+0k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+2k=2 \\ t-k=0 \\ t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=0 \\ t=0 \end{cases}$$

Le système **n'admet pas de solution** donc (AB) et $\mathcal{D}$ **ne sont pas sécantes**.

Conclusion

Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ **ne sont pas coplanaires**.

u est un nombre réel.

$M(-2+u;1+u;-1-u)$

3. $\mathcal{P}$ **:** $x+y-z-3u=0$

$(-2+u)+(1+u)-(-1-u)-3u=-2+u+1+u+1+u-3u=0$

donc le point **M appartient à la droite** $\mathcal{D}$.

$\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un **vecteur normal** à $\mathcal{D}$, or $\vec{N}=\vec{V}$ donc $\mathcal{P}$ est **orthogonal** à $\mathcal{D}$.

4. Pour déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (AB) on résout le système :

$$\begin{cases} x+y-z-3u=0 \\ x=-2k \\ y=1+k \\ z=-1 \end{cases}$$

On obtient :

$(-2k)+(1+k)-(-1)-3u=0 \Leftrightarrow -2k+1+k+1-3u=0 \Leftrightarrow -k+2-3u=0 \Leftrightarrow k=2-3u$

$x=-2(2-3u)=-4+6u$

$y=1+2-3u=3-3u$

$z=-1$

Conclusion

$\mathcal{P}$ et (AB) sont **sécants** en $\boxed{N(-4+6u;3-3u;-1)}$

5.a. $\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$ donc $\mathscr{D}$ est orthogonale à toute droites contenue dans $\mathscr{P}$.
La droite (MN) est contenue dans $\mathscr{P}$ donc $\mathscr{D}$ est **orthogonale** à (MN).

b. $M(-2+u;1+u;-1-u)$ et $N(-4+6u;3-3u;-1)$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-2+5u\\2-4u\\u\end{pmatrix}$

Le point N appartient à (AB).
Les droites (MN) et (AB) sont **perpendiculaires** si et seulement si : $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=(-2+5u)\times(-2)+(2-4u)\times 1+u\times 0=4-10u+2-4u=6-14u$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow 6-14u=0\Leftrightarrow u=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$

Pour $\boxed{u=\frac{3}{7}}$ les droites (MN) et (AB) sont **perpendiculaires**.

Remarque

Pour $u=\frac{3}{7}$, (MN) est **la perpendiculaire commune aux deux droites** non coplanaires $\mathscr{D}$ et (AB).

6.a. $MN^2=(-2+\{5\}u)^2+(2-4u)^2+u^2=25u^2-20u+4+16u^2-16u+4+u^2=42u^2-36u+8$

b. La fonction carré est **croissante** sur $[0;+\infty[$ donc la distance MN est **minimale** si et seulement si MN^2 est **minimal**.

$f(u)=42u^2-36u+8$
$f'(u)=84u-36=12(7u-3)$
$f'(u)=0\Leftrightarrow 7u-3=0\Leftrightarrow u=\frac{3}{7}$.

Conclusion

La distance MN est minimale pour $\boxed{u=\frac{3}{7}}$.