Exercice 3 — Candidats ayant suivi la spécialité — 5 points

Partie A

On considère l'équation (E) : $15x-26k=m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u;v)$ tel que $15u-26v=1$.
Trouver un tel couple.

2. En déduire une solution particulière $(x_0;k_0)$ de l'équation (E).

3. Montrer que $(x;k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $15(x-x_0)-26(k-k_0)=0$.

4. Montrer que les solutions de l'équation (E) sont exactement les couples $(x;k)$ d'entiers relatifs tels que :
$\begin{cases} x=26q+7m \\ k=15q+4m \end{cases}$ où $q\in\mathbb{Z}$.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un système de codage :
. A chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier x correspondant
. on associe ensuite à x l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26
. on associe à y la lettre correspondante.
Ainsi, par cette méthode, la lettre E est associée à 4, 4 est transformé en 15 et 15 correspond à la lettre P et donc la lettre E est codée par la lettre P.

1. Coder le mot **MATHS.**

2. Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet, à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26.

a. Montrer alors qu'il existe un entier relatif k tel que $15x-26k=y-7$.

b. En déduire que : $x\equiv 7y+3\,(26)$

c. En déduire une description du système de décodage associé au système de codage considéré.

3. Expliquez pourquoi la lettre W dans un message codé sera décodée par la lettre B. Décoder le mot WHL.

4. Montrer que par ce système de codage deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.

Correction :

Partie A

x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

(E) : $15x-26k=m$.

1. **Théorème de Bezout :**

a et b sont des entiers naturels non nuls.

a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au+bv=1$.

. Pour l'exemple, pour vérifier que les nombres 15 et 26 sont **premiers entre eux**, on utilise l'algorithme d'Euclide.

	1	1	2	1	3
26	15	11	4	3	1
11	4	3	1	0	

Le dernier reste non nul est 1 donc les nombres 15 et 26 sont premiers entre eux.

Le **théorème de Bezout** nous permet d'affirmer qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u;v)$ tels que $\boxed{15u-26v=1}$.

(remarque : v est un entier relatif, on peut donc changer le signe devant 26v).

. Pour trouver un tel couple (ou une solution particulière), on peut remarquer que le couple $(7;4)$ est **solution de l'équation** ou on peut utiliser les résultats de l'algorithme d'Euclide.

$26=1\times15+11$ (1)

$15=1\times11+4$ (2)

$11=2\times4+3$ (3)

$4=1\times3+1$ (4)

On obtient (par exemple)

(1) $11=26-1\times15$

(2) $15=1\times(26-1\times15)+4$ soit $2\times15-1\times26=4$

(3) $11=26-1\times15=2\times(2\times15-1\times26)+3$ soit $3=3\times26-5\times15$

(4) $4=2\times15-1\times26=1\times(3\times26-5\times15)+1$ soit $7+15-4\times26=1$

On obtient $(7;4)$ pour **solution particulière** de l'équation : $15u-26v=1$

2. m est un entier relatif non nul donc :

$15\times7-26\times4=1\Leftrightarrow15\times7\times m-26\times4\times m=1\times m$

Soit $15\times(7m)-26\times(4m)=m$

On pose x_0 =7m et $k_0=4m$ et le couple $(x_0;k_0)$ est une **solution** de l'équation : $\boxed{15x-26k=m}$

$(15x_0-26k_0=m)$

3. x et k sont des entiers relatifs

$(x;k)$ est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $15x-26k=m\Leftrightarrow15x-26k=15x_0-26k_0\Leftrightarrow15(x-x_0)-26(k-k_0)=0$

4. $(E)\Leftrightarrow15(x-x_0)=26(k-k_0)$

15 **divise** $26(k-k_0)$ et 15 est **premier** avec 26 donc le **théorème de GAUSS** nous permet d'affirmer que 15

divise $(k-k_0)$ donc il existe un entier relatif q tel que $\boxed{k-k_0=15q}$
et $k=15q+k_0$ et $15(x-x_0)=26\times 15q$ donc $\boxed{x-x_0=26q}$ et $\boxed{x=26q+x_0}$.

Vérification
Pour **tout** entier relatif q :
$15\times(26q+x_0)-26(15q+k_0)=15\times 26q+15x_0-26\times 15q-25k_0=15x_0-26k_0=m$
Conclusion
Les solutions de l'équation (E) sont exactement les couples $\boxed{(x;k)}$ d'entiers relatifs tels que :
$\begin{cases} x=26q+7m \\ k=15q\,44m \end{cases}$ où $q\in\mathbb{Z}$
(on a $x_0=7m$ et $k_0=4m$)

Partie B

1. A la lettre M est associée x=12
$15\times 12+7=187=26\times 7+5$ donc y=5
La lettre associée à 5 est : F
M est codée en F.

A la lettre A est associée x=0
$15\times 0+7=7=0\times 26+7$ donc y=7
La lettre associée à 7 est : H
A est codée en H.

A la lettre T est associée x=19
$15\times 19+7=2926\times 11+6$ donc y=6
La lettre associée à 6 est G
T est codée en G.

A la lettre H est associée x=7
$15\times 7+7=112=26\times 4+8$ donc y=8
La lettre associée à 8 est I
H est codée en I.

A la lettre S est associée x=18
$15\times 18+7=277=26\times 10+17$ donc y=17
La lettre associée à 17 est R
S est codée en R.

Conclusion
Le mot **MATHS** est codé en **FHGIR**.

2.a. y est le reste de la division euclidienne de 15x+7 par 26 donc :
$15x+7=k\times 26+y$ avec $0\leqslant y\leqslant 25$
k est un entier (quotient d'une division euclidienne) et $\boxed{15x-26k=y-7}$

b. On multiplie les deux membres de l'égalité par 7.
$7\times 15x-7\times 26k=7y-49$
$105x-7\times 26k=7y-49$

En utilisant les congruences modulo 26
$105=26\times 4+1$ donc $105\equiv 1(26)$
$-7\times 26k\equiv 0(26)$
$-49=-52+3=-2\times 26+3$ donc $-49\equiv 3(26)$
Conséquence
$\boxed{x\equiv 7y+3(26)}$

c. A la lettre codée est associée *y*.
On détermine *x*, le reste de la division euclidienne de $7y+3$ par 26 $(0\leqslant x\leqslant 25)$ et à x on associe la lettre décodée.

3. A la lettre W est associée $y=22$
$7\times 22+3=157=26\times 6+1$ donc $x=1$
W est décodée **B**.

A la lettre H est associée $y=7$
$7\times 7+3=52=26\times 2+0$ donc $x=0$
H est décodée en **A**.

A la lettre L est associée $y=11$
$7\times 11+3=80=3\times 26+2$ donc $x=2$
L est décodée en **C**.
Conclusion
le mot **WHL** est décodé en **BAC.**

4. On démontre la contraposée :
Si deux lettres M_1 et M_2 sont codées en la même lettre $N_1=N_2$ alors $M_1=M_2$.
$M_1(x_1)$ $M_2(x_2)$ $N_1(y_1)$ $N_2(y_2)$
Si $N_1=N_2$
alors $y_1=y_2$
et, $15y_1+3=15y_2+3$
donc, $x_1=x_2$
et $M_1=M_2$