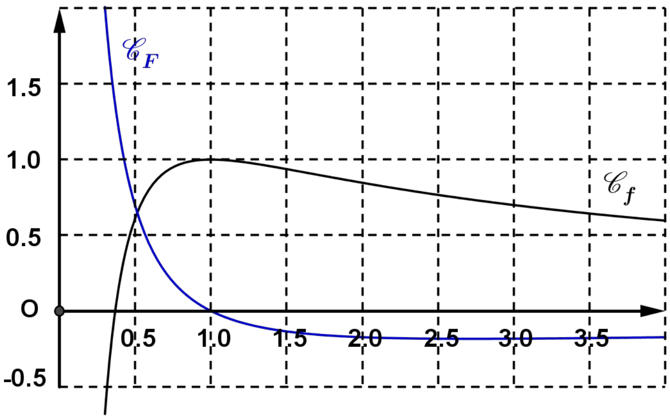
Exercice 4 — 3 points

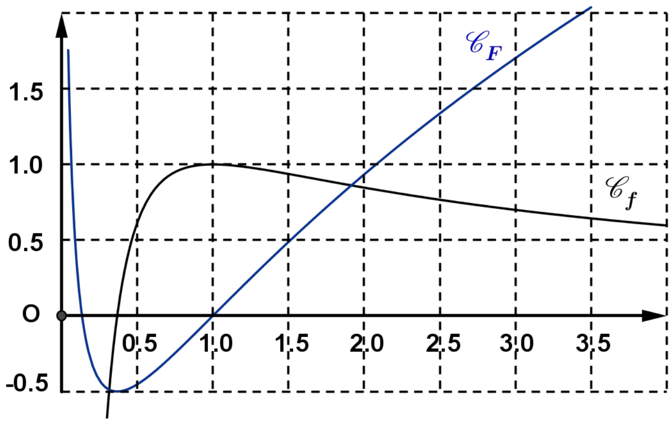
On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}(1+\ln x)$.

1. Dans les trois situations suivantes, on a dessiné, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et une courbe $\mathscr{C}_F$. Dans une seule situation, la courbe $\mathscr{C}_F$ est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f. Laquelle ? Justifier la réponse.

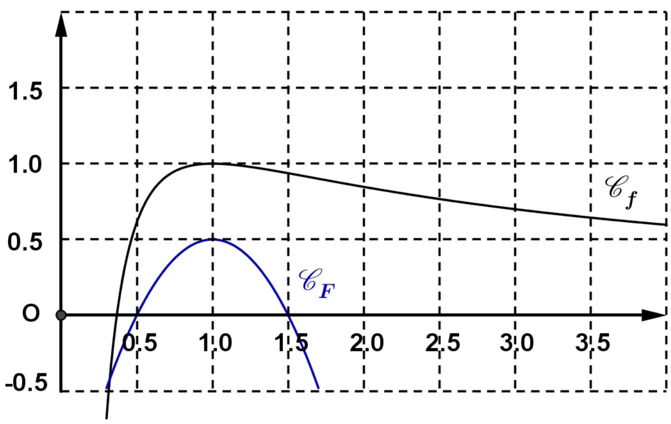
Situation 1



Situation 2



Situation 3



2. Dans la situation retenue à la question 1, on appelle :

. K le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et $\mathscr{D}$ la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées.

. L le point d'intersection de $\mathscr{C}_F$ et de l'axe des abscisses ayant une abscisse supérieure à $\frac{1}{2}$ et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

a. Déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine plan délimité par les droites $\mathscr{D}$ et Δ , par la courbe $\mathscr{C}_f$ et par l'axe des abscisses.

b. Peut-on déterminer la valeur exacte de cette aire ?

Correction :

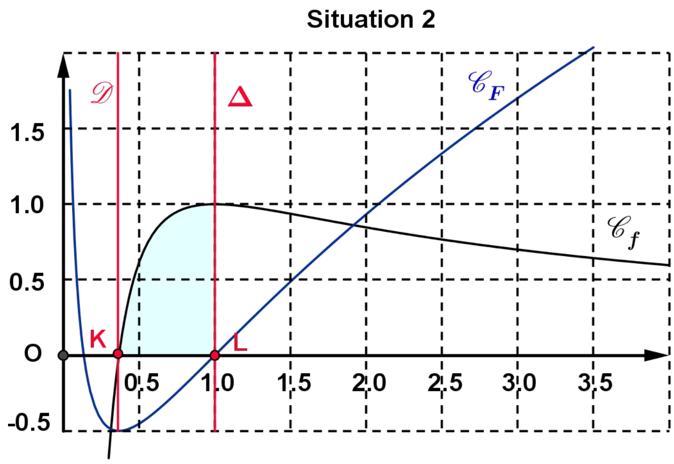
1. On détermine graphiquement le signe de la fonction f :
$f(x)=0$ pour $x=\alpha$ avec $0<\alpha<0,5$
f est **négative** sur $]0;\alpha[$ et **positive** sur $]\alpha;+\infty[$.

or $F'=f$ donc F est **décroissante** sur $]0;\alpha[$ et **croissante** sur $]\alpha;+\infty[$.

Pour la situation 1 :
$\mathscr{C}_F$ est une courbe représentative d'une fonction décroissante sur $]0;1[$ donc ce n'est pas la bonne situation.
Pour la situation 3 :
$\mathscr{C}_F$ est une courbe représentative d'une fonction croissante sur $]0;1[$ donc ce n'est pas la bonne situation.
Pour la situation 2 :
Les variations correspondent aux variations que l'on doit obtenir c'est donc la bonne situation.

Conclusion
La situation 2 est la situation demandée.

2.



a. On nous demande de déterminer une valeur approchée de l'aire en U.A. de la partie de plan colorée en bleu.
Première méthode
En regardant le quadrillage, l'aire d'un petit carré est égale à : $0,5\times0,5=0,25$ U.A.
On peut évaluer l'aire demandée à l'aire de deux carrés et on obtient pour valeur approchée **0,5U.A**.
Deuxième méthode
Si on note α l'abscisse de K et 1 L'abscisse de L alors l'aire en U.A. de la partie de plan colorée en bleu est égale à $\int_\alpha^1 f(x)\,dx$.
or F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$ donc :
$$\int_\alpha^1 f(x)\,dx=F(1)-F(\alpha)$$
Par lecture graphique : $F(\alpha)=-0,5$ et $F(1)=0$
donc $\int_\alpha^1 f(x)\,dx=0-(-0,5)=0,5$.
On obtient pour valeur approchée **0,5U.A**.

b. oui si on est capable de déterminer la valeur exacte de α et ensuite de calculer l'intégrale.

Pour calculer α , il suffit de résoudre l'équation $f(x)=0$.

Or, $f(x)=\frac{1}{x}(1+\ln x)$

$f(x)=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

donc $\boxed{\alpha=\frac{1}{e}}$.

Pour calculer l'intégrale $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx$, il faut calculer une primitive de f en fonction de x.

On peut remarquer que :

$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\times\ln x$

$f_1(x)=\frac{1}{x}$, une primitive de f_1 sur $]0;+\infty[$ est F_1 telle que $\boxed{F_1(x)=\ln x}$

$f_2(x)=\frac{1}{x}\times\ln x$

si on pose $u(x)=\ln x$ on a $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $f_2(x)=u(x)\times u'(x)$

Une primitive F_2 de f_2 sur $]0;+\infty[$ est $\boxed{\frac{1}{2}(u(x))^2=\frac{1}{2}\ln^2(x)}$.

Une primitive de f sur $]0;+\infty[$ est F_1+F_2

$\boxed{F_1(x)+F_2(x)=\ln x+\frac{1}{2}\ln^2 x}$

Attention

On ne peut pas affirmer tout de suite que $F_1+F_2=F$, car deux primitives d'une même fonction sur un même intervalle diffèrent d'une constante.

On peut donc écrire qu'il existe un nombre réel k tel que pour tout nombre réel x strictement positif on ait : $F(x)=F_1(x)+F_2(x)+k$.

En remarquant que $F(1)=0$, on retrouve que $k=0$ et $F(x)=\ln x+\frac{1}{2}\ln^2 x$

$$\int_{½}^{1} f(x)\,dx = F(1)-F\left(\frac{1}{e}\right)=0-\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)+\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1}{e}\right)\right)=0-(-1+\frac{1}{2}\times(-1)^2)=\frac{1}{2}=0{,}5 \text{ U.A.}$$

Conclusion

La valeur approchée donnée est donc la valeur exacte.