Exercice 1 7 points

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendantes.

Partie A
On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est notée $\mathcal{R}(z)$.

1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u=1-i$.

2. Déterminer, pour tout réel θ la forme algébrique et la forme et l'écriture exponentielle du nombre complexe $e^{i\theta}(1-i)$.

3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ on a : $\cos(\theta)+\sin(\theta)=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

Partie B
Danx cette partie, on admet que pour tout réel θ on a : $\cos(\theta)+\sin(\theta)=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :
$f(x)=e^{-x}\cos(x)$ et $g(x)=e^{-x}$.
On définit la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x)=g(x)-f(x)$.
Les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données en annexe, dans un repère orthogonal.

1. Conjecturer :
a. les limites des fonctions f et g en $+\infty$
b. la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$
c. la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est maximal.

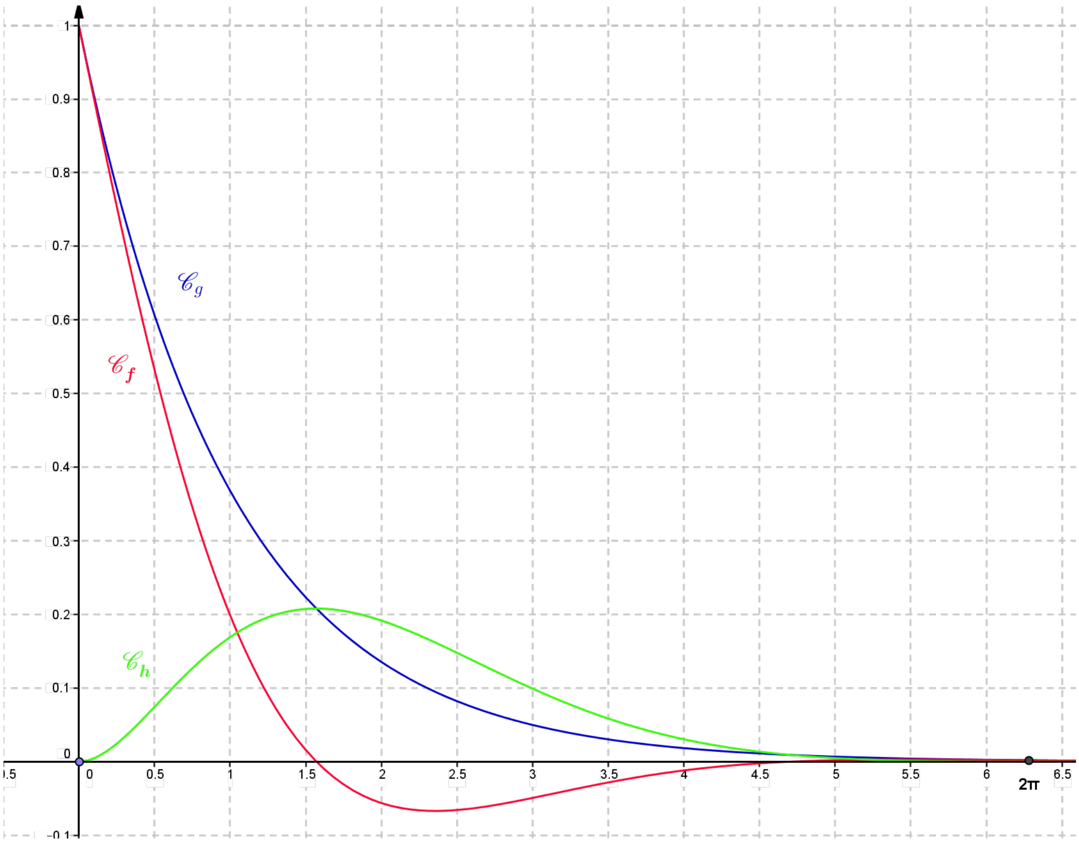
2. Justifier que $\mathcal{C}_g$ est située au dessus de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3. Démontrer que la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

4.a. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0:+\infty[$.
Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$:
$h'(x)=e^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]$.
b. Justifier que, sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\geqslant 0$ et que , sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\leqslant 0$.
c. En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

5. On admet que, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction H définie par :
$H(x)=\frac{1}{2}e^{-x}[-2+\cos(x)-\sin(x)]$ est une primitive de la fonction h.
On note $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=2\pi$;
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.

ANNEXE EXERCICE 1



CORRECTION

Partie A

1. $u=1-i$ $\quad |u|^2=1^2+1^2=2$ $\quad |u|=\sqrt{2}$

$u=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$\arg(u)=\varphi \quad (2\pi)$

$\cos(\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\varphi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\varphi=-\frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$

Conséquence

$u=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2. $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$

$e^{i\theta}(1-i)=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))(1-i)=\cos(\theta)+i\sin(\theta)-i\cos(\theta)-i^2\sin(\theta)$

$=\cos(\theta)+\sin(\theta)+i(\sin(\theta)-\cos(\theta))$

. $e^{i\theta}(1-u)=e^{i\theta}\left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)=\sqrt{2}(e^{i\theta}\times e^{-\frac{\pi}{4}})=\sqrt{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}$

3. $e^{i\theta}(1-u)=\cos(\theta)+\sin(\theta)+i(\sin(\theta)-\cos(\theta))$

donc $\mathcal{R}(e^{i\theta}(1-u))=\cos(\theta)+\sin(\theta)$

$e^{i\theta}(1-u)=\sqrt{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\left(\cos(\theta)-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+i\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

donc $\mathcal{R}(e^{i\theta}(1-u))=\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})$

Conclusion

$\cos(\theta)+\sin(\theta)=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

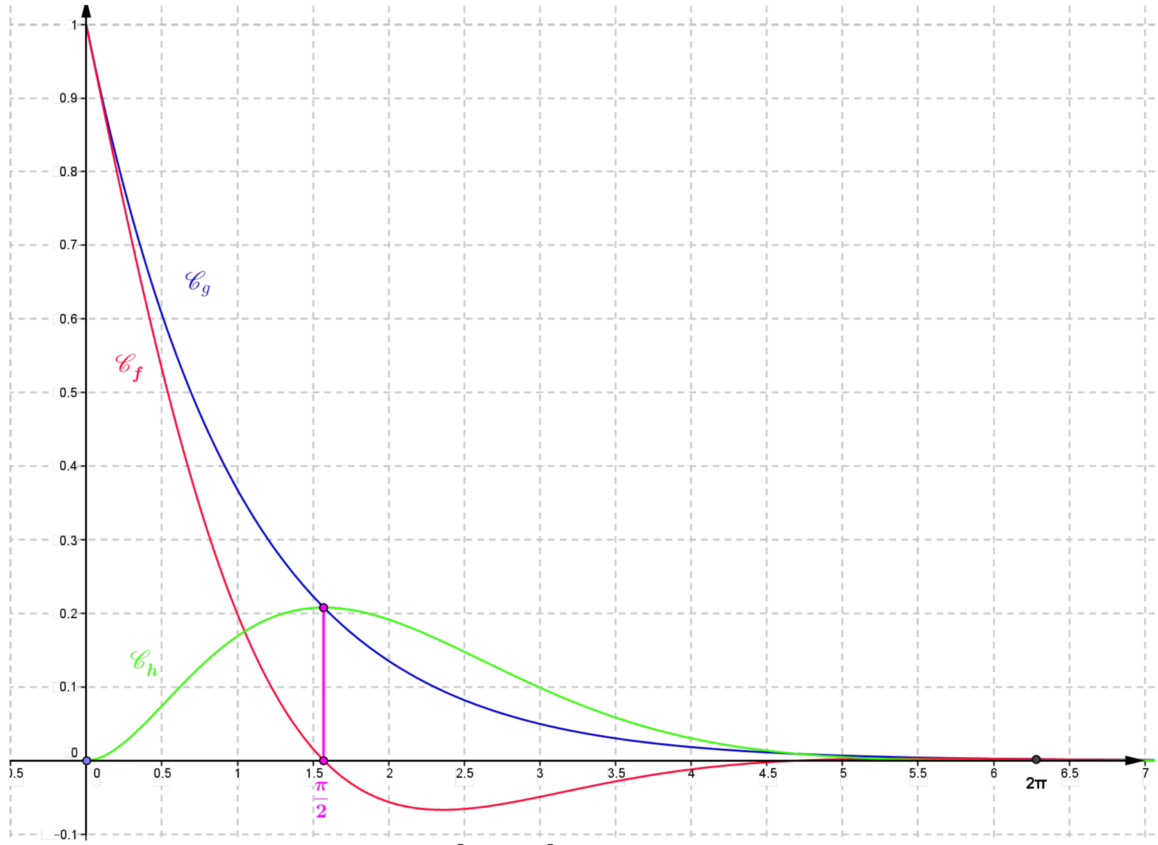
Partie B

1. Conjectures (par lecture graphique)

a. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ **;** $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$.

b. $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

c. La valeur maximale de l'écart entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est obtenue pour $x=1{,}6$ (l'abscisse du maximun de h.



2. Pour tout nombre réel appartenant à $[0;+\infty[$

$g(x)-f(x)=e^{-x}-\cos(x)e^{-x}=(1-\cos(x))e^{-x}$

or $e^{-x}>0$ et $1-\cos x\geqslant 0$ donc $g(x)-f(x)\geqslant 0$ et $\mathscr{C}_g$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$.

3. $g(x)=e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ et la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$.

. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$

$f(x)=\cos(x)e^{-x}$ donc $|f(x)|=|\cos(x)|\times|e^{-x}|=|\cos(x)|\times e^{-x}=|\cos(x)|\times g(x)$

or $-1\leqslant\cos(x)\leqslant 1$ donc $0\leqslant|\cos(x)|\leqslant 1$

et $0\leqslant|f(x)|\leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

et la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

4.a. Pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;+\infty[$

$h(x)=g(x)-f(x)=(1-\cos(x))e^{-x}$

h est dérivable sur $[0;+\infty[$

<u>Rappels</u>

$(e^u)'=u'\times e^u$ donc $(e^{-x})'=-e^{-x}$ ($u(x)=-x$)

et $(\cos x)'=-\sin x$

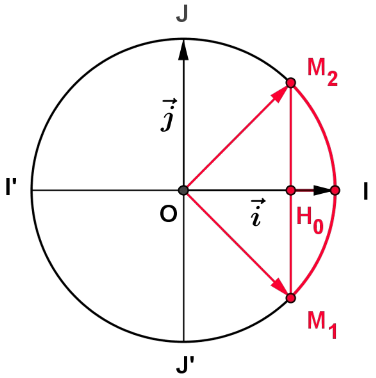
$h'(x)=\sin(x)e^{-x}+(1-\cos(x))(-e^{-x})=\sin(x)e^{-x}-e^{-x}+\cos(x)e^{-x}$

$h'(x)=(\cos(x)+\sin(x)-1)e^{-x}=\left(\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right)e^{-x}$

b. Le signe de h'(x) sur $[0;2\pi]$ est le signe de $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ sur $[0;2\pi]$.

. si $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ alors $-\frac{\pi}{4}\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}$ On pose $X=x-\frac{\pi}{4}$ et on vérifie que $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\cos X$.

On considère un cercle trigonométrique



$(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_1}) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$; $(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_2}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$; $(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = X\ (2\pi)$; $OH_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

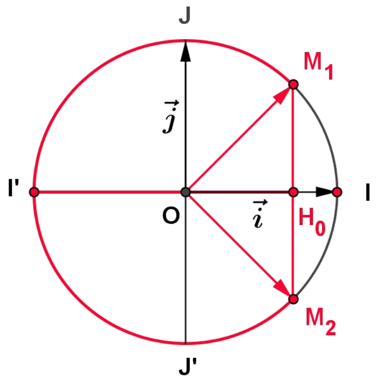
si $-\frac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \frac{\pi}{4}$ alors $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos X$

<u>Conséquence</u>

$0 \leqslant \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$

. si $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$ alors $\frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{7\pi}{4}$. On pose $X = x - \frac{\pi}{4}$ et on vérifie que $\frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant \cos X$.

On considère un cercle trigonométrique



$(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$; $(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_2}) = \frac{7\pi}{4}\ (2\pi)$; $(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = X\ (2\pi)$; $OH_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

si $\frac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \frac{7\pi}{4}$ alors $\frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant \cos X$.

<u>Conséquence</u>

$0 \geqslant \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$.

c. Tableau de variations de h

x	0		$\frac{\pi}{2}$		2π
h'(x)		+	0	−	
h(x)	0	↗	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	↘	0

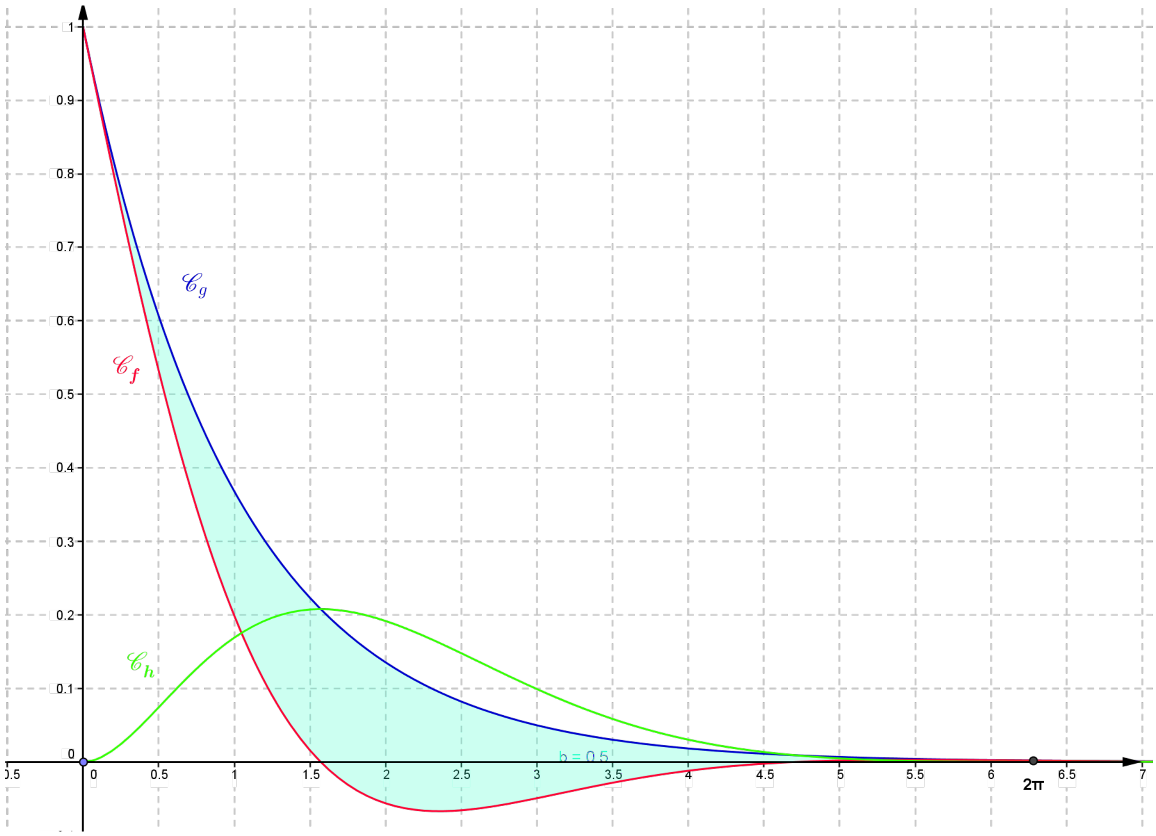
$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}$

5. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$

$H(x)=\frac{1}{2}e^{-x}[-2+\cos(x)-\sin(x)]$

H est une primitive de h sur $[0;+\infty[$.

$\mathscr{D}$ est le domaine coloré en bleu sur le graphique ci-après.



L'aire du domaine $\mathscr{D}$ en U.A. est : $\mathscr{A} = \int_0^{2\pi} h(x)\,dx$

$\mathscr{A} = H(2\pi)-H(0)$

$H(2\pi)=\frac{1}{2}e^{-2\pi}[-2+1-0]=\frac{1}{2}e^{-2\pi}$

$H(0)=\frac{1}{2}e^{0}[-2+1-0]=-\frac{1}{2}$

$\mathscr{A} = -\frac{1}{2}e^{-2\pi} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\pi}$ U.A.

