Exercice 2 — 5 points

Partie A

On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre $\left(\text{ng}\,.\,\text{ml}^{-1}\right)$ d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1. Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu=40$ et d'écart type $\sigma=8$.
On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée.
Calculer la probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 $\text{ng}\,.\,\text{ml}^{-1}$

2. Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 $\text{ng}\,.\,\text{ml}^{-1}$ et que 10 % d'entre elles ont un tanx de substance Gamma inférieur à $43\,\text{ng}\,.\,\text{ml}^{-1}$.
On appelle T' la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en $\text{ng}\,.\,\text{ml}^{-1}$ chez une personne atteinte par la maladie étudiée.
On admet que T' suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart type σ'.
Préciser la valeur de μ' et déterminer la valeur de σ'.

Partie B

Pour dépister chez la personne la maladie étudiée, on effectue un prise de sang. On considère que le dépistage est positif si le taux de substance Gamma est supérieur ou égal à $45\,\text{ng}\,.\,\text{ml}^{-1}$.
Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle :
. M l'événement « le patient est atteint par la maladie étudiée »
. D l'événement « le patient a un dépistage positif ».
On admet que :
. 82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif
. 73 **%** des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif.
On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

1. Démontrer que la probabilité qu'un patient ait un dépistage positit est de 0,325.

2. Calculer $P_{\overline{D}}(M)$. Interpréter ce résultat.

3. Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Qu'en pensez-vous ?

Partie C

Lors du dépistage précédent, la prise de sang est effectuée chez les sujets à jeun.
Les données montrent que 82 % des patients malades ont un dépistaage positif.
Pour améliorer le confort des personnes succeptibles de subir cet examen sanguin,
on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.
On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'est pas effectuée à jeun.
Le dépistage se révèle positif pour 74 % d'entre elles.
Ce dépistage peut-il être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun ?

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

1. La variable aléatoire T suit la loi normale d'espérance $\mu=40$ et d'écart type $\sigma=8$
En utilisant la calculatrice, on obtient :
$P(60\leqslant T)=0,0062$

2. « le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes de la maladie étudiée est de $50\,ng.ml^{-1}$ », donc l'espérance mathématique de T' est $\mu'=50$.
« 10 % des personnes atteintes de la maladie étudiée ont un taux de substance Gamma inférieur à $43\,ng.ml^{-1}$ », donc $P(T'\leqslant 43)=0,1$.

La variable aléatoire T' suit la loi normale d'espérance $\mu'=50$ et d'écart type σ', donc $X=\dfrac{T'-50}{\sigma'}$ suit la loi normale réduite et centrée $\mathcal{N}(0;1)$.

$$T'\leqslant 43 \Leftrightarrow \frac{T'-50}{\sigma'}\leqslant\frac{43-50}{\sigma'}\Leftrightarrow X\leqslant\frac{-7}{\sigma'}$$

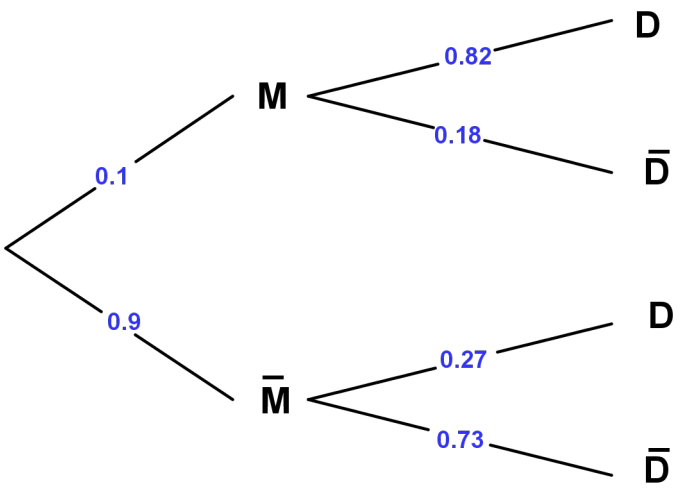
On veut déterminer le nombre réel a tel que $P(X\leqslant a)=0,1$
En utilisant la calculatrice , on obtient :
$P(X\leqslant -1,2816)=0,1$ donc $a=-1,2816$

$$P(T'\leqslant 43)=0,1\Leftrightarrow P\left(X\leqslant\frac{-7}{\sigma'}\right)=0,1$$

donc $-1,2816=\dfrac{-7}{\sigma'}\Leftrightarrow\sigma'=\dfrac{7}{1,2816}$

$\sigma'=5,46$ à 10^{-2} près.
Conclusion
T' suit la loi normale d'espérance $\mu'=50$ et d'écart type $\sigma'=5,46$.

Partie B
« 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie »
$P(M)=0,1$ donc $P(\bar{M})=1-P(M)=1-0,1=0,9$
« 82 % des personnes atteintes par la maladie ont un dépistage positif »
$P_M(D)=0,82$ donc $P_M(\bar{D})=1-P_M(D)=1-0,82=0,18$
« 73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un test négatif »
$P_{\bar{M}}(\bar{D})=0,73$ donc on obtient l'arbre pondéré suivant :



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

1. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales

$P(D)=P(M\cap D)+P(\bar{M}\cap D)$

$P(D)=P(M)\times P_M(D)+P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(D)=0,1\times 0,82+0,9\times 0,27=0,082+0,243=0,325$

2. $P_{\bar{D}}(M)=\dfrac{P(M\cap\bar{D})}{P(\bar{D})}$

$P(M\cap\bar{D})=P(M)\times P_M(\bar{D})=0,1\times 0,18=0,018$

$P_{\bar{D}}(M)=\dfrac{0,018}{0,675}=\dfrac{18}{675}=0,027$ à 10^{-3} près

Interprétation

Moins de 3 % des personnes ayant un test négatif sont malades.

3. $P_D(M)=\dfrac{P(M\cap D)}{P(D)}$

$P(M\cap D)=P(M)\times P_M(D)=0,1\times 0,82=0,082$

$P_D(M)=\dfrac{0,082}{0,325}=\dfrac{82}{325}=0,25$ **à** 10^{-2} près.

Donc le médecin a raison.

Partie C

« 82 % des patients malades ont un dépistage positif » donc $p=0,82$

On considère un groupe de 300 personnes donc $n=300$.

$n=300\geqslant 30$ $np=300\times 0,82=246\geqslant 5$ $n(1-p)=300\times 0,18=54\geqslant 5$

On considère l'intervalle de fluctuation asymptorique au seuil de 95 %.

$I_{300}=\left[0,82-1,96\times\sqrt{\dfrac{0,82\times 0,18}{300}};0,82\times\sqrt{\dfrac{0,82\times 0,18}{300}}\right]$

$1,96\times\sqrt{\dfrac{0,82\times 0,18}{300}}=0,04$ à 10^{-2} près

$I_{300}=[0,82-0,04;0,82+0,04]=[0,78:0,86]$

Le dépistage se révèle positif pour 74 % d'entre elles donc la proportion de l'échantillo est 0,74.

0,74 n'appartient pas à l'intervalle I_{300} , donc le dépistage ne peut être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés