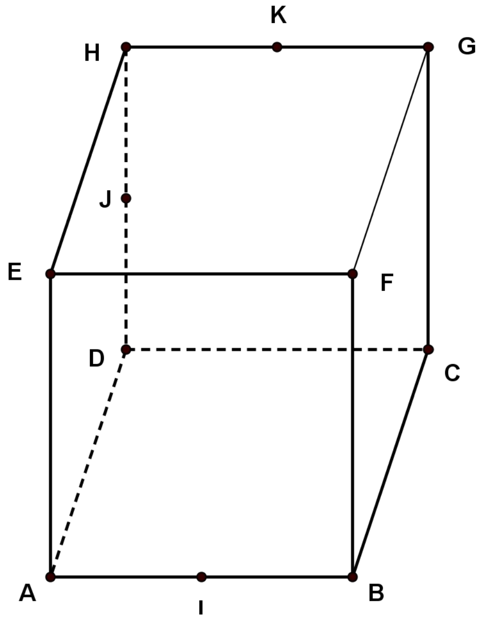
Exercice 3 — 3 points

ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de [AB], J est le milieu de [HD] et K est le milieu de [HG]
On se place dans le repère orthonormé $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$.



1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

2. Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

3. Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

CORRECTION

Le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$) est un repère orthonormé de l'espace.
On détermine les coordonnées des points donnés.

$A(0;0;0)$ $B(1:0:0)$ $C(1;1;0)$ $D(0;1;0)$
$E(0;0;1)$ $F(1;0;1)$ $G(1;1;1)$ $H(0;1;1)$

I est le milieu de $[AB]$ $I(0{,}5;0;0)$
J est le milieu de $[DH]$ $J(0;1;0{,}5)$
K est le milieu de $[GH]$ $K(0{,}5;1;1)$

1. Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK) si et seulement si $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (IJK) (par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$).

$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-0{,}5\\1\\0{,}5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{IJ}=(-1)\times(-0{,}5)+(-1)\times1+1\times0{,}5=0$

$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{IK}=(-1)\times0+(-1)\times1+1\times1=0$

Conclusion

$\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal à (IJK).

2. La droite (BD) est parallèle au plan (IJK) si et seulement si $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BD}=(-1)\times(-1)+(-1)\times1+1\times0=0$

donc (BD) est parallèle à (IJK).

3. La droite (CE) est la droite passant par $C(1;1;0)$ et de vecteur $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, on obtient pour représentation paramétrique de (CE) : $\begin{cases}x=-t+1\\y=-t+1\\z=t+0\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

Donc $M(-t+1;-t+1;t)$.

Le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) si et seulement si $\overrightarrow{CE}$ est normal à (BDM)
$\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à (BD)donc $\overrightarrow{CE}$ est normal à (BDM) si et seulement si $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BM}$ (par exemple).

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-t+1-1\\-t+1-0\\t-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-t\\-t+1\\t\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

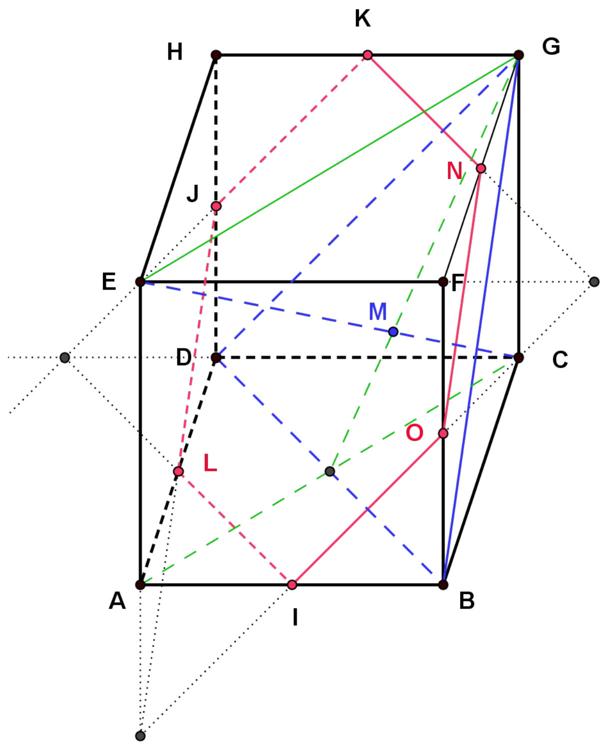
$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BM}=(-1)\times(-t)+(-1)\times(-t+1)+1\times t=3t-1$

$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow3t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$

$M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

COMPLEMENT : Approche géométrique du problème

On considère la figure suivante obtenue à l'aide du logiciel géogébra



On commence par construire la section du cube par le plan (IJK).
On obtient l'hexagone ILJKNO (on peut facilement démontrer que L est le milieu de [AD] et N est le milieu de [FG] et O est le milieu de [BF] et que l'hexagone est régulier).

1. Le plan (ACGE) est le plan médiateur de [IL] et de [NK], la droite (CE) est contenue dans ce plan.
<u>Conséquence</u>
(CE) est orthogonale à (IL)
Le plan (EFCD) est le plan médiateur de [LJ] et de [NO], la droite (CE) est contenue dans ce plan.
<u>Conséquence</u>
(CE) est orthogonale à (LJ)
<u>Conclusion</u>
La droite (CE) est orthogonale à deux droites sécantes contenues dans le plan (IJK) donc (CE) est orthogonale au plan (IJK).

2. (IL) et (BD) sont parallèles (droite des milieux).
(BD) est parallèle à une droite contenue dans le plan (IJK) donc (BD) est parallèle au plan (IJK).

3. De même (DG) est parallèle à (JK).
D'autre part (JK) et (IO) sont parallèles (côtés opposés de l'hexagone régulier).
Deux droites sécantes (BD) et (DG) contenues dans le plan (BDG) sont parallèles aux deux droites sécantes (IL) et (IO) contenues dans le plan (IJK).
<u>Conclusion</u>
Les plans (IJK) et (BDG) sont parallèles.
<u>Conséquence</u>
Le plan (BDM) (avec M appartenant à la droite (CE)) est parallèle au plan (IJK) si et seulement si M appartient au plan (BDG).
M est donc le point d'intersection de la droite (CE) et du plan (BDG).
On a tracé la droite d'intersection des plans (IJK) et (BCG) et on obtient le point M.