Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle S(n) le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Vérifier que $S(6)=12$ et calculer S(7).

2.a. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S(n)\geqslant 1+n$.
b. Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n)=1+n$?

3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p\times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.
a. Démontrer que que $S(n)=(1+p)(1+q)$.
b. On considère la proposition suivante :
« pour tout entiers naturels n et m non nuls distincts, $S(n\times m)=S(n)\times S(m)$ ».
Cette proposition est-elle vraie ou fausse? Justifier

4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k , où p est un nombre premier et k un entier naturel non nul.
a. Quels sont les diviseurs de n ?
b. En déduire que $S(n)=\dfrac{1-p^{k+1}}{1-p}$.

5. On suppose dans cette question que n s'écrit $p^{13}\times q^7$ où p et q sont des nombres premiers distincts.
a. Soit m un entier naturel non nul.
Démontrer que m divise n si et seulement si, il existe deux nombres entiers s et t avec $0\leqslant s\leqslant 13$ et $0\leqslant t\leqslant 7$ tels que $m=p^s\times q^t$
b. Démontrer que $S(n)=\dfrac{1-p^{14}}{1-p}\times\dfrac{1-q^8}{1-q}$.

CORRECTION

1. L'ensemble des diviseurs positifs de 6 est : $D_6=\{1;2;3;6\}$ et $S(6)=1+2+3+6=12$.
7 est un nombre premier donc $D_7=\{1;7\}$ et $S(7)=1+7=8$.

2.a. Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 admet au moins deux diviseurs distincts : 1 et n donc la spmme des diviseurs de n est sup érieure ou égale à 1+n. Soit $S(n)\geqslant n+1$.
b. Si $S(n)=1+n$ alors il n'existe pas d'autres diviseurs de n distincts de 1 et n.
<u>Conséquence</u>
n est un nombre premier.

3.a. $n=p\times q$ (p et q sont des nombres premiers ditincts) donc l'ensemble des diviseurs de n est :
$D_n=\{1;p;q;n\}$.
$S_n=1+p+q+n$
Or $(1+p)(1+q)=1+p+q+p\times q$ ($n=p\times q$)
donc $S(n)=(1+p)(1+q)$
b. Nous venons de voir que la proposition est si n et m sont deux nombres premiers distincts.
Pour démontrer que la proposition est fausse, il suffit de donner un contre exemple.
On choisit : $n=2$ $D_2=\{1;2\}$ $S(2)=3$
$n=6$ $D_6=\{1;2;3;6\}$ $S(6)=12$
$2\times 6=12$ $D_{12}=\{1;2;3;4;6;12\}$ $S(12)=1+2+3+4+6+12=28$
or $S(2)\times S(6)=3+12=36$
<u>Conclusion</u>
La proposition est fausse.

4. On suppose dans cette question que : $n=p^k$ (p est un nombre premier et k est un entier naturel non nul).
a. $D_n=\{1=p^0;p^1;p^2;\ldots;p^k\}$ $p^k=n$
b. $S(n)=1+p+p^2+\ldots+p^k$
S(n) est la somme des (k+1) premiers termes de la suite géométrique de raison p et de premier terme:1 donc
$S(n)=\dfrac{1-p^{k+1}}{1-p}$.

5.a. p et q sont des nombres premiers distincts $n=p^{13}\times q^7$, nous avons la décomposition de n en produit de facteurs premiers.
Si $m=1$ alors m peut s'écrire $m=p^0\times q^0$.
Si $m\neq 1$ alors dans la décomposition en produit de facteurs premiers, les facteurs pouvant intervnir sont p ou q.
Si m n'est pas divisible par p alors $m=q^t$ avec $1\leqslant t\leqslant 7$ et m peut s'écrire $m=p^0\times q^t$.
Si m n'est pas divisible par q alors $m=p^s$ avec $1\leqslant s\leqslant 13$ et m peut s'écrire $m=p^s\times q^0$
Si m est divisible par p et q alors $m=p^s\times q^t$ avec $1\leqslant s\leqslant 13$ et $1\leqslant q\leqslant 7$.
<u>Conclusion</u>
Tout diviseur de m peut s'écrire $m=p^s\times q^t$ avec $0\leqslant s\leqslant 13$ et $0\leqslant t\leqslant 7$ et tout nombre m ayant cette écriture est un diviseur de n.

b. <u>Première méthode</u>
L'ensemble des diviseurs de p^{13} est $D=\{p^0;p^1;p^2;\ldots,p^{13}\}$
L'ensemble des diviseurs de q^7 est $D'=\{q^0;q^1;q^2;\ldots;q^7\}$
Si on considère le produit P :
$P=(p^0+p^1+p^2+\ldots+p^{13})\times(q^0+q^1+q^2+\ldots+q^7)$
chaque terme m du développement peut s'écrire $m=p^s\times q^t$ avec $0\leqslant s\leqslant 13$ et $0\leqslant q\leqslant 7$
donc chaque terme du développement est un diviseur de n et tous les nombres ayant cette écriture sont des

termes du développement.

Conclusion

P est la somme des diviseurd de n donc P = S(n), puis on remarque que : $p^0+p^1+p^2+\ldots+p^{13}$ est la somme des 14 premiers termes de la suite géométrique de raison p et de premier terme 1 donc

$p^0+p^1+p^2+\ldots+p^{13}=\frac{1-p^{14}}{1-p}$, de même $q^0+q^1q^2+\ldots+q^7=\frac{1-q^8}{1-q}$

donc $S(n)=\frac{1-p^{14}}{1-p}\times\frac{1-q^8}{1-q}$.

Deuxième méthode

On classe les $14\times 8=112$ diviseurs de n dont l'écriture est $p^s\times q^t$ avec $0\leqslant s\leqslant 13$ et $0\leqslant t\leqslant 7$ de la manière suivante :

Les 14 premiers (pour t = 0) $q^0=1$

1 ; p^1 ; p^2 ...; p^{13} leur somme est : $\frac{1-p^{14}}{1-p}=1\times\frac{1-p^{14}}{1-p}$

Les 14 suivants (pour t = 1) q^1

$q^1\times p^0$; $q^1\times p^1$; $q^1\times p^2$;...; $q^1\times p^{13}$ leur somme est : $q^1\times\frac{1-p^{13}}{1-p}$

Les 14 suivants (pour t = 2) q^2

$q^2\times p^0$; $q^2\times p^1$; $q^2\times p^2$;...; $q^2\times p^{13}$ leur somme est : $q^2\times\frac{1-p^{14}}{1-p}$

.....

Les 14 derniers (pour t = 7) q^7

$q^7\times p^0$; $q^7\times p^1$; $q^7\times p^2$;...; $q^7\times p^{13}$ leur somme est : $q^7\times\frac{1-p^{14}}{1-p}$

Conséquence

La somme totale des diviseurs de n est :

$$S(n)=1\times\frac{1-p^{14}}{1-p}+q^1\times\frac{1-p^{14}}{1-p}+..+q^7\times\frac{1-p^{14}}{1-p}=(1+q^1+\ldots+q^7)\times\frac{1-p^{14}}{1-p}=\frac{1-q^8}{1-q}\times\frac{1-p^{13}}{1-p}$$